

Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios

(Simulaciones numéricas en el entorno del cálculo fraccionario)

TRABAJO FIN DE GRADO

Curso 2019 /2020



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

Estudiante: Ivan Gregorio Rodríguez de Tembleque

Tutor: Antonio López Montes

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Madrid, 28 de febrero de 2020

Resumen

Contexto histórico y antecedentes del cálculo fraccionario. Definiciones más relevantes del cálculo fraccionario y su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Problema de Abel. Definición de derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. Aplicación del cálculo fraccionario en problemas de difusión. Aplicación de cálculo fraccionario en fractales, conjuntos de Julia y de Mandelbrot. Simulación numérica del atractor de Lorenz y el atractor de Rössler y su forma fraccionaria. Simulaciones numéricas de ecuaciones en diferencias y caos. Aplicaciones físicas del cálculo fraccionario.

Palabras clave

Análisis, cálculo, simulación, fraccionario, Grünwald-Letnikov, difusión, fractales, Julia, Mandelbrot, atractor, Lorenz, Rössler, diferencias, caos.

Abstract

Historical context and background of fractional calculation. Most relevant definitions of the fractional calculation and its application in the resolution of fractional differential equations. Abel's problem. Definition of fractional derivative of Grünwald-Letnikov. Application of fractional calculus in diffusion problems. Application of fractional calculation in fractals, Julia and Mandelbrot sets. Numerical simulation of the Lorenz attractor and the Rössler attractor. Numerical simulations of equations in differences and chaos. Physical applications of fractional calculation.

Keywords

Analysis, calculation, simulation, fractional, Grünwald-Letnikov, diffusion, fractals, Julia, Mandelbrot, attractor, Lorenz, Rössler, differences, chaos.

Tabla de contenido

Tema 0. Motivación del trabajo.....	5
Tema 1. Introducción histórica	5
Tema 2. Esquemas numéricos	8
Tema 3. Derivadas fraccionarias y ecuaciones diferenciales	10
3.1. Derivada fraccionaria.....	10
3.2. Ejemplos destacables de la derivada fraccionaria numérica	12
3.3. Ecuaciones diferenciales fraccionarias	14
Tema 4. Difusión clásica, fraccionaria y compleja	15
4.1. Difusión clásica.....	15
4.2. Difusión fraccionaria y compleja	15
Tema 5. Fractales clásicos y fraccionarios.....	20
5.1. Concepto de fractal	20
5.2. Conjuntos de Julia	20
5.3. Conjuntos de Mandelbrot.....	22
Tema 6. Caos clásico y fraccionario. Atractor de Lorenz y de Rössler	24
6.1. El atractor de Lorenz	24
6.2. El atractor de Rössler.....	26
Tema 7. Caos clásico y fraccionario. Ecuaciones en diferencias.....	27
7.1. Estudio de la dinámica de ecuaciones en diferencias.	27
7.2. Ecuación logística	30
7.3. Caos ecuación logística.....	32
7.4. Ecuaciones en diferencias fraccionarias	33
APÉNDICE	35
BIBLIOGRAFÍA	52

Tema 0. Motivación del trabajo

Podemos utilizar Análisis numérico en problemas relativos a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo de valores y vectores propios, y resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales, los problemas de interpolación y aproximación de funciones, la derivación e integración numéricas, los problemas de valor inicial y de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias, y los problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales.

El Análisis numérico consta de métodos que permiten obtener una solución aproximada (en ocasiones exacta) del problema considerado tras realizar un número finito aunque muy elevado de operaciones lógicas y algebraicas elementales.

Hemos estudiado como derivar funciones puede ser útil en diferentes problemas, para conocer máximos y mínimos de curvaturas, optimizar recursos, predecir comportamientos de objetos físicos etc, pero en todos estos casos se trata de derivadas enteras, en lenguaje natural, primera derivada, segunda derivada... Pero... ¿Porque no hablamos de la “media” derivada?, ¿existe alguna forma de calcularla? e incluso ¿porque no considerar la deriva de $3/2$? Si suponemos cierto que se puede derivar utilizando un orden racional, ¿porque no dar un paso más y buscar derivadas de orden irracional? Todas estas preguntas las estamos enfocando desde el conjunto de los números reales, pero ¿existe algún motivo por el cual no utilizar números complejos como por ejemplo i como orden de una derivada?

Hay que destacar que el desarrollo del Análisis numérico se ha visto acelerado debido a la rápida evolución de los ordenadores. Podemos decir que desde la década de los años cuarenta en la que aparecieron los primeros ordenadores, el cálculo numérico se unió a ellos debido a que ayudaba notablemente a mejorar la eficacia de la mayoría de los métodos puesto que estos suelen tener como base un gran volumen de cálculos y manipulaciones de datos.

En el presente siglo XXI el cálculo fraccionario vive un momento de clara expansión.

Tema 1. Introducción histórica

El concepto de derivada con orden no necesariamente un valor entero nació junto a la propia definición de cálculo diferencial. Desde entonces se empezó a investigar la aplicación y el sentido que tendría una derivada con orden fraccionario y comenzó a denominarse derivada fraccionaria dentro de un campo llamado cálculo fraccionario. Aunque recibe el nombre de derivada fraccionaria, no solo se va a utilizar un orden racional, también pueden utilizarse órdenes irracionales e incluso complejos.

Se tiene constancia de que fue Leibnitz quien inventó la notación $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ y que en 1695 L'Hôpital se interesó en que ocurriría en el caso de que el valor de n fuese $\frac{1}{2}$ preguntándole a Leibnitz mediante carta. De forma similar Leibnitz escribió a Bernoulli sobre “derivadas de orden genérico”.

En 1697 Leibnitz utilizó $d^{\frac{1}{2}}$ para afirmar que mediante el cálculo diferencial fraccionario se podría alcanzar el mismo resultado que el producto infinito de Wallis por $\frac{\pi}{2}$

Sin embargo, no fue hasta 1819 cuando aparece la primera referencia en un texto a la derivada de orden arbitrario, en concreto en el libro “Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral” del matemático francés Lacroix.

Lacroix desarrollo una fórmula para la diferenciación fraccionaria para la enésima derivada de x^n por inducción. Lacroix sustituye n por $\frac{1}{2}$ y utilizando el hecho de que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

En 1822 Fourier planteó la siguiente expresión como definición de la derivada de orden u arbitrario de una función no potencial, aunque no llegó a darle ninguna aplicación.

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p^u \cos\left(px - p\alpha + \frac{u\pi}{2}\right) dp$$

En 1823 Abel presentó la primera aplicación de derivada fraccionaria que le ayudo en el problema de Tautócrona resolviendo la integral

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt = k$$

mediante la derivada fraccionaria de orden $\frac{1}{2}$, el cual consiste en determinar una curva tal que exista una independencia entre el tiempo que tarda en descender por la curva una masa puntual sin fricción bajo el efecto de la gravedad y el punto de partida.

La solución de Abel para el problema se Tautócrona llamó la atención de Liouville, quien introdujo probablemente la primera introducción formal lógica del concepto de derivada fraccional mediante sus publicaciones entre 1832 y 1855.

Una Tautócrona o curva isócrona es una curva en la que existe independencia entre el tiempo tomado por un objeto que desliza sin rozamiento en gravedad uniforme hasta su punto más bajo y el punto de partida del objeto.

Abel resolvió el famoso problema de la curva Tautócrona mediante su reducción a una ecuación integral que desde entonces lleva su nombre.

Junto a algunas fórmulas de Fourier son los primeros ejemplos de la expresión implícita de una función desconocida de una ecuación en la que esta función aparece en forma integral.

Liouville extendió el resultado conocido de derivadas de orden entero positivo

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax}$$

para órdenes arbitrarios obteniendo con $v > 0$

$$\frac{d^v}{dx^v} e^{ax} = a^v e^{ax}$$

Desarrolló $f(x)$ como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$$

y obtuvo la derivada de $f(x)$ como:

$$\frac{d^v}{dx^v} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}$$

Este resultado recibe el nombre de Primera definición de Liouville

En 1847, Riemann escribió un artículo modificando el operador fraccionario dado por Liouville, dando lugar a lo que hoy conocemos como integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

En los años 1867 y 1868 Grünwald y Letnikov a partir de la definición de derivada de orden entero propusieron la siguiente solución al problema de diferenciación no entera:

$$(D^\alpha f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\nabla_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}$$

Donde cobra importancia el concepto de cociente incremental, siendo este:

$$(\nabla_h^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh) \text{ con } n=[\alpha]$$

Letnikov investigó la derivada de Grünwald y publicó los primeros resultados sobre tal operador.

En 1898 Riemann propone una nueva definición de derivada fraccionaria

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_k^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

En el desarrollo del análisis matemático y la teoría de funciones a lo largo del siglo XX aparecen nuevas definiciones de operadores fraccionarios.

En 1917, Hermann Weyl definió una integral fraccionaria adecuada para funciones periódicas.

En el año 1969, Michele Caputo físico y matemático italiano con la finalidad de encontrar una expresión que permitiera interpretar físicamente las condiciones iniciales de los numerosos problemas aplicados de la época, escribe una nueva definición de derivada de orden fraccionario. Caputo definió la derivada fraccionaria como:

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha-n+1}} d\eta$$

con $n-1 < \alpha < n$

Finalmente, en 1974 se publica el primer texto dedicado enteramente a esta disciplina, “the Fractional Calculus”, escrito por el físico y matemático J. Spanier y el químico Keith B. Oldham.

Las primeras publicaciones en España sobre diferenciación fraccionaria llegaron de la mano del académico Maravall en el año 1959 en las que se trataban estudios sobre ingeniería de oscilaciones, entre ellas partículas oscilatorias fraccionarias asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.

Actualmente se están realizando estudios sobre el cálculo fraccionario muy intensos.

Un ejemplo de ello es la existencia de varios grupos de investigación del cálculo fraccionario en el departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid.

Tema 2. Esquemas numéricos

Como punto de partida vamos a tomar la definición de derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De forma intuitiva, aproximamos esta expresión como:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Para una aproximación sistemática de las derivadas vamos a utilizar el polinomio de Taylor.

Tomamos una función $f(x)$ cuya expresión desconocemos, pero si sabemos que pasa por los siguientes puntos:

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0 + h))\}$$

Desarrollando por Taylor obtenemos:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi) \text{ donde } \xi \in [x_0, x_0 + h]$$

Y despejando esta expresión:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

donde el término $\frac{h}{2} f''(\xi)$ representa el término de error. Se puede observar como hemos llegado a la misma conclusión que al comienzo de la sección, pero añadiendo el termino de error.

Ahora vamos a centrarnos en obtener más expresiones de aproximación de la derivada de una función en un punto de forma análoga utilizando la información que conocemos.

En este caso disponemos de la misma función desconocida $f(x)$ pero conocemos que pasa por los puntos

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0 + h)), (x_0 + 2h, f(x_0 + 2h))\}$$

Desarrollando por Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(v)$$

Añadimos la constante A a la primera expresión y le sumamos la segunda expresión obteniendo:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + 2h) + Af(x_0 + h) = \\ & = (1 + A)f(x_0) + (2 + A)hf'(x_0) + \left(\frac{4 + A}{2}\right)\frac{h^2}{2!}f''(x_0) + A\frac{h^3}{3!}f'''(\xi) + \frac{8h^3}{3!}f'''(v) \end{aligned}$$

A continuación, fijamos A=-4 con el objetivo de hacer 0 el término de la segunda derivada y obtenemos:

$$f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) = -3f(x_0) - 2hf'(x_0) - 2\frac{h^3}{3}f'''(\xi) + \frac{8h^3}{3!}f'''(v)$$

Despejando la primera derivada de f' en el punto x_0

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \left[-2\frac{h^3}{3}f'''(\xi) + \frac{4h^3}{3}f'''(v)\right]$$

Simplificando la expresión, definimos:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + 2\frac{h^3}{3}[-f'''(\xi) + 2f'''(v)]$$

donde $\xi, v \in [x_0, x_0 + 2h]$

Obviando el término del error, la anterior aproximación de $f'(x_0)$ constituye la aproximación de la derivada en el punto x_0 conocidos los puntos

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0 + h)), (x_0 + 2h, f(x_0 + 2h))\}$$

Tema 3. Derivadas fraccionarias y ecuaciones diferenciales

3.1. Derivada fraccionaria

La derivada fraccionaria numérica de orden 1 se define como sigue:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^1 f = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Expandiendo esta fórmula tenemos

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^1 f = \frac{(-1)^0 \frac{1!}{0!(1-0)!} f(x) + (-1)^1 \frac{1!}{1!(1-1)!} f(x-h)}{h}$$

De igual forma para derivadas de orden 2

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$$

Expandiendo esta fórmula tenemos

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{(-1)^0 \frac{2!}{0!(2-0)!} f(x-0 \cdot h) + (-1)^1 \frac{2!}{1!(2-1)!} f(x-1 \cdot h) + (-1)^2 \frac{2!}{2!(2-2)!} f(x-2 \cdot h)}{h}$$

Trabajando de forma análoga hasta llegar a un orden n , concluimos que la expresión para cualquier n orden será:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} f(x-k \cdot h)$$

Que se puede reescribir como

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)} f(x-k \cdot h)$$

En esta reformulación hemos usado la función Γ junto a sus propiedades que a continuación enumeramos:

$$n! = \Gamma(n+1)$$

$$\Gamma(-i) = \infty \text{ para todo } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La derivada n -ésima solo guarda memoria de los n puntos anteriores más próximos a x debido precisamente a la propiedad $\Gamma(-n) = 0$.

Por tanto, extendemos el concepto de derivada de orden α a la siguiente expresión:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1-k)} f(x-k \cdot h)$$

Podemos afirmar que la derivada α -ésima guarda memoria de los puntos anteriores a x puesto que $\Gamma(\alpha + 1 - k) \neq 0$ para cualquier valor de α no entero.

Volviendo al planteamiento numérico de una función, si tomamos la función $f(x)$ definida en un intervalo $x \in [a, b]$, podemos obtener una partición de $N+1$ puntos del intervalo como $\{x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_N = a + Nh\}$ tomando un $h > 0$ y $N = \frac{b-a}{h}$.

De esta forma, $f(x)$ queda definida numéricamente como el siguiente vector en el cual se evalúa la función en cada uno de los puntos obtenidos en la partición.

$$(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N))$$

Para mejorar la comprensión y hacer una notación más sencilla, denotaremos $f(x_i) = f_i$, por tanto, el vector anterior quedará de la siguiente forma:

$$(f_0, f_1, \dots, f_N)$$

Como hemos tratado anteriormente, vamos a definir la derivada numérica de orden 1 utilizando dicho vector como:

$$f_n^1 = \frac{f_n - f_{n-1}}{h} \text{ para todo } n=1, \dots, N.$$

Resaltar que el valor de la primera derivada en un punto solo involucra información de la función en este punto y en el punto anterior y por tanto no definimos f_0^1 , aunque esto no va a tener mayor relevancia.

Encontramos un problema parecido en la segunda derivada, donde:

$$f_n^2 = \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{h^2} \text{ para todo } n=2, \dots, N.$$

No podremos definir los dos primeros puntos f_0^2 y f_1^2

Para solventar estos inconvenientes, teniendo en cuenta la expresión hallada anteriormente, definimos la derivada fraccionaria como:

$$f_n^\alpha = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1-k)} f_{n-k} \text{ para todo } n=0, 1, \dots, N$$

Donde no habría inconveniente en definir f_0^α puesto que

$$f_0^\alpha = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^0 (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1-k)} f_{n-k} = \frac{1}{h^\alpha} f_0$$

Para un valor $f_0 \neq 0$ considerar valores del parámetro h pequeños nos llevará a un valor no acotado (o divergente) de f_0^α .

Existe otro inconveniente, esta vez, un inconveniente numérico, ya que la suma de coeficientes $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1-k)}$ puede conllevar problemas numéricos por la evaluación de la función Γ para argumentos muy elevados.

Para solventar este inconveniente vamos a utilizar la siguiente propiedad de la función Γ

$$\Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{x-1}$$

De esta forma:

$$f_n^\alpha = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1-k)} f_{n-k} \text{ para todo } n=0,1,\dots,N$$

Es equivalente a la siguiente expresión:

$$f_n^\alpha = \frac{1}{h^\alpha} \left[f_n - (\alpha) f_{n-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} f_{n-2} - \dots + (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} f_0 \right]$$

Es remarcable que, en esta expresión, a partir del primer valor de k que supera al valor de α los coeficientes $(-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!}$ tienen signo constante.

Definimos la derivada numérica fraccionaria de orden α de la función $f(x)$ en los puntos $x_i \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ mediante la expresión para todo $i = 0, 1, \dots, N$:

$$(D^\alpha f)_i = \frac{f_i - \frac{\alpha}{1} f_{i-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} f_{i-2} - \dots + (-1)^i \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(i-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} f_0}{h^\alpha}$$

La derivada fraccionaria con números no enteros consta del valor de la función en el punto en el cual se evalúa y también el valor de la función en todos los puntos anteriores de la partición. Por tanto, tiene sentido definir la derivada fraccionaria en todos los puntos de la partición, incluyendo el extremo izquierdo.

Sin embargo, para esta definición, si el valor de α es un número natural equivale a la derivada clásica, excepto ocasionalmente en algunos puntos del extremo izquierdo de la partición.

3.2. Ejemplos destacables de la derivada fraccionaria numérica

Ejemplos destacables de la derivada fraccionaria numérica para ciertos órdenes de una función en cinco de sus puntos:

- Derivada $\frac{1}{2}$

Punto x_0	$(D^{\frac{1}{2}} f)_0 = \frac{f_0}{(h)^{\frac{1}{2}}}$
Punto x_1	$(D^{\frac{1}{2}} f)_1 = \frac{f_1 - \frac{1}{2} f_0}{(h)^{\frac{1}{2}}}$
Punto x_2	$(D^{\frac{1}{2}} f)_2 = \frac{f_2 - \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{8} f_0}{(h)^{\frac{1}{2}}}$
Punto x_3	$(D^{\frac{1}{2}} f)_3 = \frac{f_3 - \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{8} f_1 - \frac{1}{16} f_0}{(h)^{\frac{1}{2}}}$
Punto x_4	$(D^{\frac{1}{2}} f)_4 = \frac{f_4 - \frac{1}{2} f_3 - \frac{1}{8} f_2 - \frac{1}{16} f_1 - \frac{5}{128} f_0}{(h)^{\frac{1}{2}}}$

Es necesario tener en cuenta que con f_0 valor nulo, la derivada fraccionaria puede dar lugar a comportamientos asintóticos para dicho punto x_0 .

- Derivada 1

Punto x_0	$(D^1 f)_0 = \frac{f_0}{h}$
Punto x_1	$(D^1 f)_1 = \frac{f_1 - f_0}{h}$
Punto x_2	$(D^1 f)_2 = \frac{f_2 - f_1}{h}$
Punto x_3	$(D^1 f)_3 = \frac{f_3 - f_2}{h}$
Punto x_4	$(D^1 f)_4 = \frac{f_4 - f_3}{h}$

En el punto x_0 la derivada fraccionaria puede llevar a comportamientos asintóticos.

- Derivada $\frac{3}{2}$

Punto x_0	$\left(D^{\frac{3}{2}} f\right)_0 = \frac{f_0}{(h)^{\frac{3}{2}}}$
Punto x_1	$\left(D^{\frac{3}{2}} f\right)_1 = \frac{f_1 - \frac{3}{2}f_0}{(h)^{\frac{3}{2}}}$
Punto x_2	$\left(D^{\frac{3}{2}} f\right)_2 = \frac{f_2 - \frac{3}{2}f_1 + \frac{3}{8}f_0}{(h)^{\frac{3}{2}}}$
Punto x_3	$\left(D^{\frac{3}{2}} f\right)_3 = \frac{f_3 - \frac{3}{2}f_2 + \frac{3}{8}f_1 + \frac{1}{16}f_0}{(h)^{\frac{3}{2}}}$
Punto x_4	$\left(D^{\frac{3}{2}} f\right)_4 = \frac{f_4 - \frac{3}{2}f_3 + \frac{3}{8}f_2 + \frac{1}{16}f_1 + \frac{3}{128}f_0}{(h)^{\frac{3}{2}}}$

- Derivada 2

Punto x_0	$(D^2 f)_0 = \frac{f_0}{(h)^2}$
Punto x_1	$(D^2 f)_1 = \frac{f_1 - 2f_0}{(h)^2}$
Punto x_2	$(D^2 f)_2 = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(h)^2}$
Punto x_3	$(D^2 f)_3 = \frac{f_3 - 2f_2 + f_1}{(h)^2}$
Punto x_4	$(D^2 f)_4 = \frac{f_4 - 2f_3 + f_2}{(h)^2}$

3.3. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

También podemos hablar de ecuación diferencial fraccionaria. Tomando como referencia la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} D^\alpha y = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad x \in (a, b)$$

Podemos discretizar este problema de valor inicial mediante la siguiente expresión:

$$\begin{cases} (D^\alpha y)_i = f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ \text{Dato inicial } y_0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N + 1 \in (a, b)$$

Retomando la expresión de la derivada fraccionaria

$$(D^\alpha f)_i = \frac{f_i - \frac{\alpha}{1} f_{i-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} f_{i-2} - \dots + (-1)^i \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(i-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} f_0}{h^\alpha}$$

Y sustituyéndola en la expresión discretizada, nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{y_i - \frac{\alpha}{1} y_{i-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} y_{i-2} - \dots + (-1)^i \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(i-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} y_0}{h^\alpha} = f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

con *Dato inicial* y_0 y conociendo que $i = 1, \dots, N + 1 \in (a, b)$

Despejando llegamos a la siguiente expresión:

$$y_i = \frac{\alpha}{1} y_{i-1} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} y_{i-2} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(i-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} y_0 + h^\alpha f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Volviendo al inicio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, de forma análoga tomando la expresión:

$$\begin{cases} D^\alpha y = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

Podemos sustituir como hemos hecho anteriormente dejando la función Γ y definimos

$$\frac{1}{h^\alpha} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\alpha+1-k)} y_{n-k} \right) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Reescribimos esta definición como:

$$\frac{1}{h^\alpha} \left(y_n + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha + 1 - k)} y_{n-k} \right) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Despejando obtenemos una expresión de la misma forma de la anterior:

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha + 1 - k)} y_{n-k} + h^\alpha f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Tema 4. Difusión clásica, fraccionaria y compleja

4.1. Difusión clásica

Tomamos una partícula dotada de un movimiento de forma aleatoria en el plano complejo. Con la siguiente ecuación en diferencias definimos el paseo aleatorio de la partícula para $k=2,3,\dots,N$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + e^{i*\theta} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

Podemos reescribir (con salto de una unidad) la ecuación de diferencias como

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k = e^{i*\theta} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

para $k=2,3,\dots,N$

A continuación, estudiaremos como afecta el cálculo fraccionario a la difusión.

4.2. Difusión fraccionaria y compleja

Ahora sobre esta ecuación en diferencias tomando $h=1$ obtenemos que:

$$\begin{cases} (D^\alpha x)_k = e^{i*\theta} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

para $k=2,3,\dots,N$

De esta forma podemos definir un paseo aleatorio con memoria, donde $\alpha \in \mathbb{C}$

Por otro lado, utilizando la definición de derivada fraccionaria

$$(D^\alpha f)_k = \frac{f_k - \frac{\alpha}{1} f_{k-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} f_{k-2} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} f_0}{h^\alpha}$$

tomando $h=1$ nos quedará

$$(D^\alpha x)_k = x_k - \frac{\alpha}{1} x_{k-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x_{k-2} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x_0$$

Reescribimos $(D^\alpha x)_k = e^{i*\theta}$ como

$$x_k = \frac{\alpha}{1} x_{k-1} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x_0 + e^{i \cdot \theta}$$

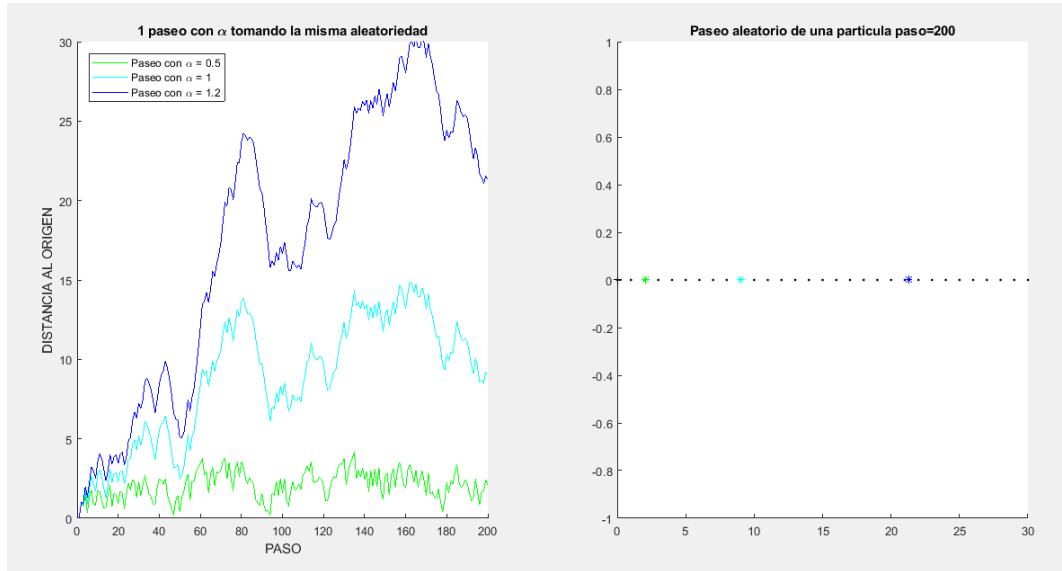
Se puede resumir en la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_k = \overrightarrow{-c_{k-1}} \cdot \overrightarrow{x_{k-1}} + e^{i \cdot \theta} \\ x_0 = 0 \end{cases} \text{ con } \theta \in [0, 2\pi]$$

para $k=2,3,\dots,N$

Como estamos en el plano complejo, la forma de medir la distancia es tomando la diferencia entre el valor absoluto y el origen (0,0)

Creamos un paseo aleatorio con distintos α y obtenemos el siguiente resultado:



El color azul oscuro describe el mismo comportamiento que un paseo aleatorio aplicándole una derivada fraccional con orden de derivación $\alpha=1.2$ mientras que con el color verde le hemos aplicado una derivada fraccional con $\alpha=0.5$

La memoria creada al aplicar un orden de derivación al comportamiento natural de la partícula se ve muy afectada por el valor que tenga α , en caso de ser menor ($\alpha=0.5$), el comportamiento del paseo no sufre una variación tan notable como con $\alpha=1$. De forma contraria, al elevar α , (tomamos $\alpha=1.2$), la variación se ve afectada tomando un comportamiento más “extremo”.

En la imagen de la derecha observamos la distancia entre la partícula y el origen para cada uno de los comportamientos y en cada uno de los pasos, hasta un total de 200 pasos.

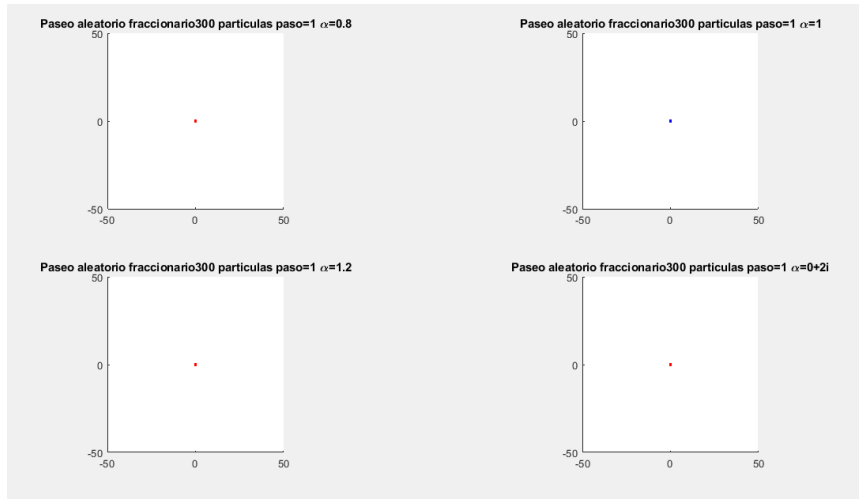
[Ver imagen dinámica en el apéndice]

- Movimiento de partículas en el plano complejo

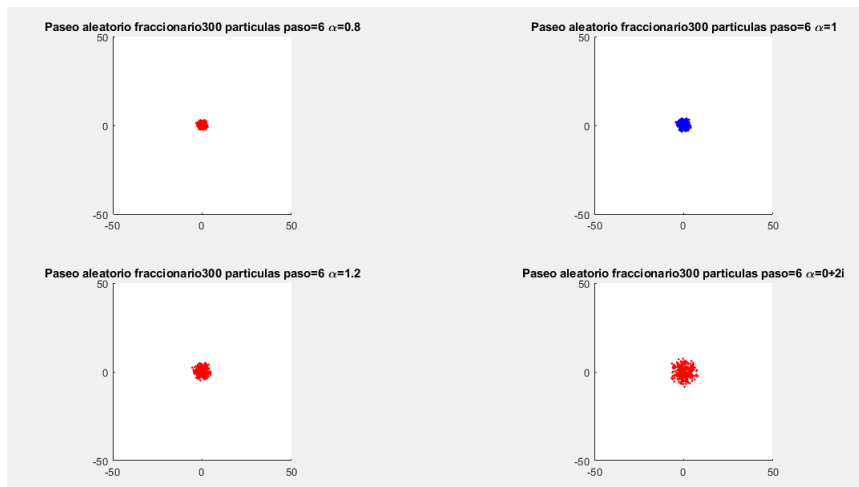
Tomamos 300 partículas situadas en el origen de coordenadas (0,0) y le aplicamos a cada una de ellas un paseo aleatorio diferente. Este paseo tendrá un total de 200 pasos.

En la siguiente gráfica podemos observar el comportamiento de dichas partículas en el plano complejo. Además, le aplicaremos derivadas fraccionarias con $\alpha=0.8$, 1, 1.2 y $2i$

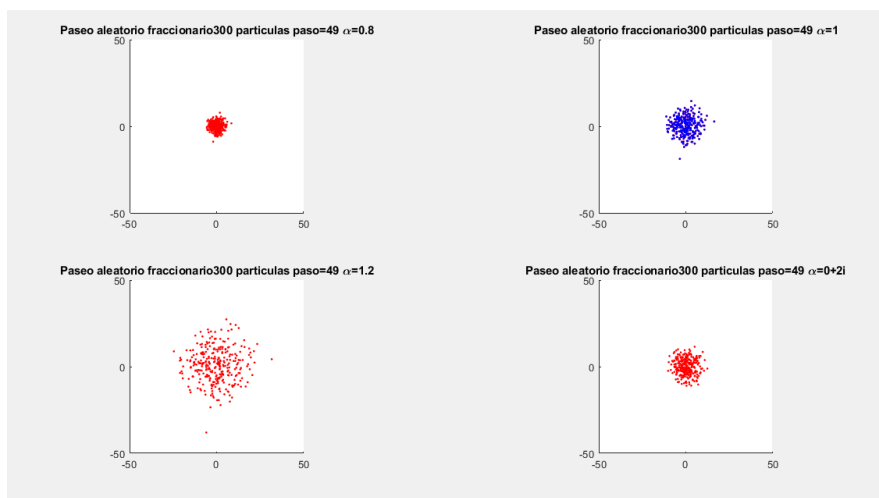
Paso 1



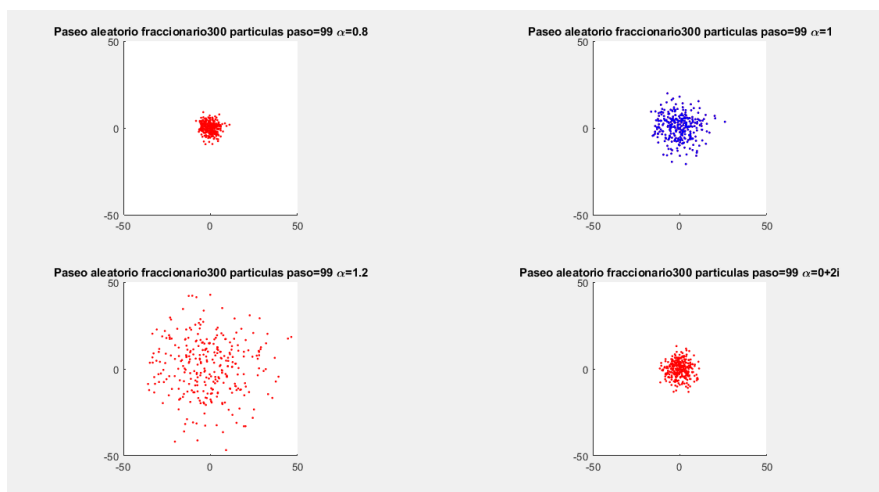
Paso 6



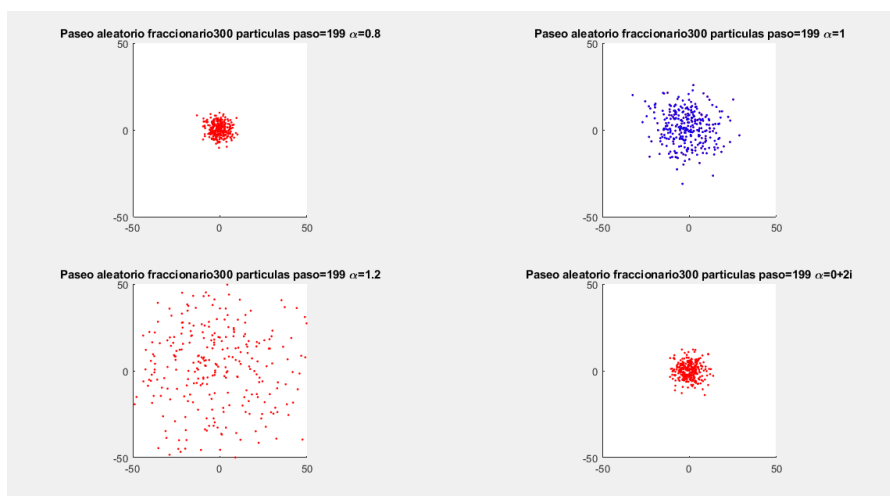
Paso 49



Paso 99



Paso 199



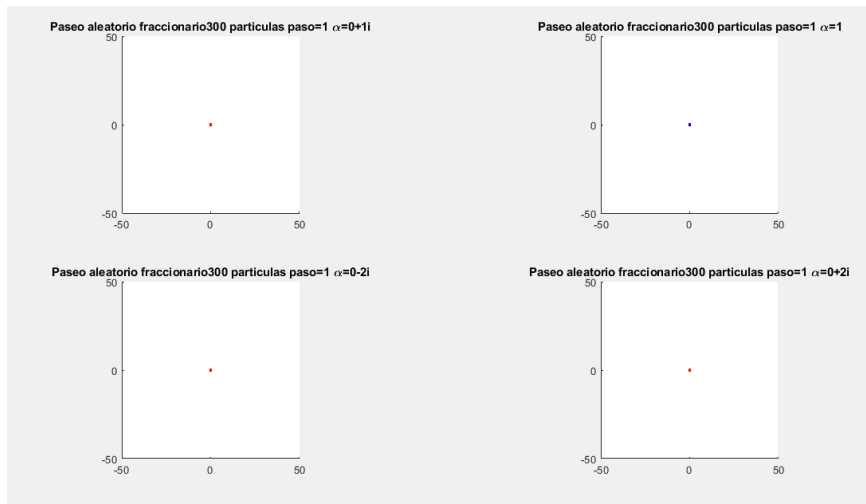
Podemos observar que para el orden de derivación $\alpha=1$ se produce una difusión clásica en la que cada partícula toma un paseo alejándose del origen.

Aplicando $\alpha=0.8$ estos paseos sufren el peso de la memoria que frena su expansión, mientras que con $\alpha=1.2$ ocurre el efecto adverso, cada una de las partículas gana se expanden con más facilidad. Para ambos valores de α obtenemos una difusión anómala.

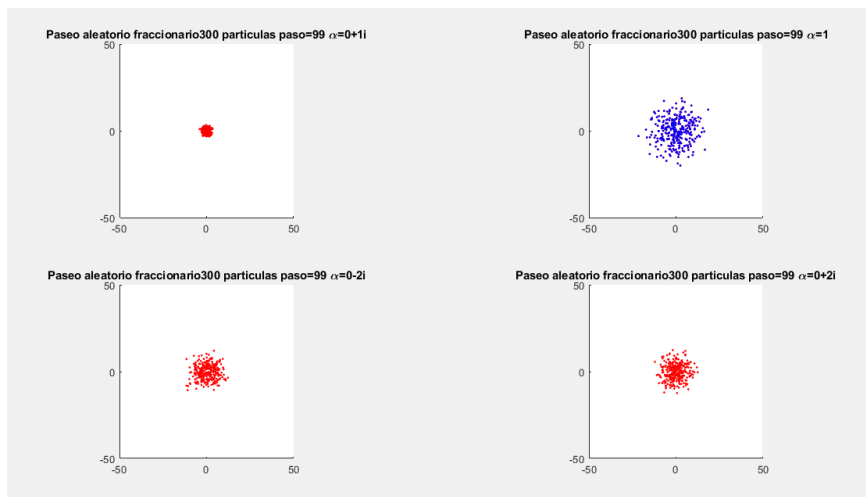
Cuando se trata de un α complejo, en este ejemplo con $\alpha=2i$, la memoria del paseo provoca que las partículas se muevan en sentido antihorario a la vez que se expanden.

Estudiemos el mismo comportamiento esta vez con $\alpha \in \mathbb{C}$

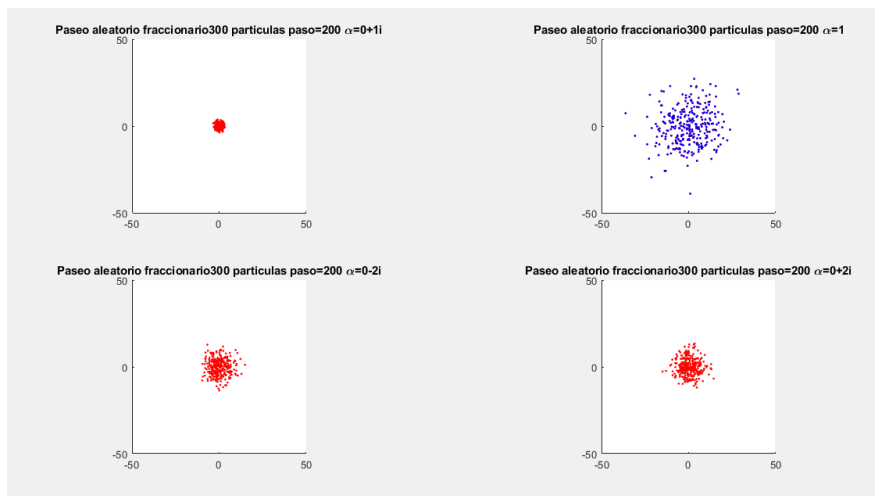
Paso 1



Paso 99



Paso 200



Podemos observar que para valores de α cuya parte imaginaria es mayor que 0 las partículas realizan paseos en sentido antihorario respecto al origen, mientras que cuando la parte imaginaria de α es menor que 0 las partículas girarán en sentido horario. También es destacable que el comportamiento de expansión de las partículas con α imaginario no diferencia de signo, simplemente se rige por el valor absoluto de este.

Tema 5. Fractales clásicos y fraccionarios

5.1. Concepto de fractal

En 1975 el matemático Benoît Mandelbrot propuso el término “fractal” para referirse a un objeto geométrico que tiene una estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular y que sigue una regla de repetición. El término viene del latín “fractus”, que significa fracturado.

Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número racional no entero.

Sin embargo, antes de Mandelbrot, desde principios del siglo XX, ya se conocían objetos que seguían estructuras fractales, aunque no recibían el nombre "fractal". La forma habitual de diferenciar lo que hoy recibe el nombre de dimensión fractal fue establecida a principios del siglo XX en el ámbito de la teoría de la medida.

5.2. Conjuntos de Julia

✓ Clásico

El matemático Gaston Julia desarrolló el estudio de una familia de conjuntos fractales que se producen al observar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa.

Sea una función holomorfa f el conjunto de Julia está constituido por los puntos que tienen un comportamiento 'caótico' bajo la iteración de f . El conjunto lo denotaremos $J(f)$

La familia más famosa y la que vamos a estudiar de conjuntos de Julia es consecuencia de las funciones cuadráticas

$$f_c(z) = z^2 + c$$

con $c \in \mathbb{C}$

Algoritmo:

$\forall z \in \mathbb{C}$ se construye la sucesión:

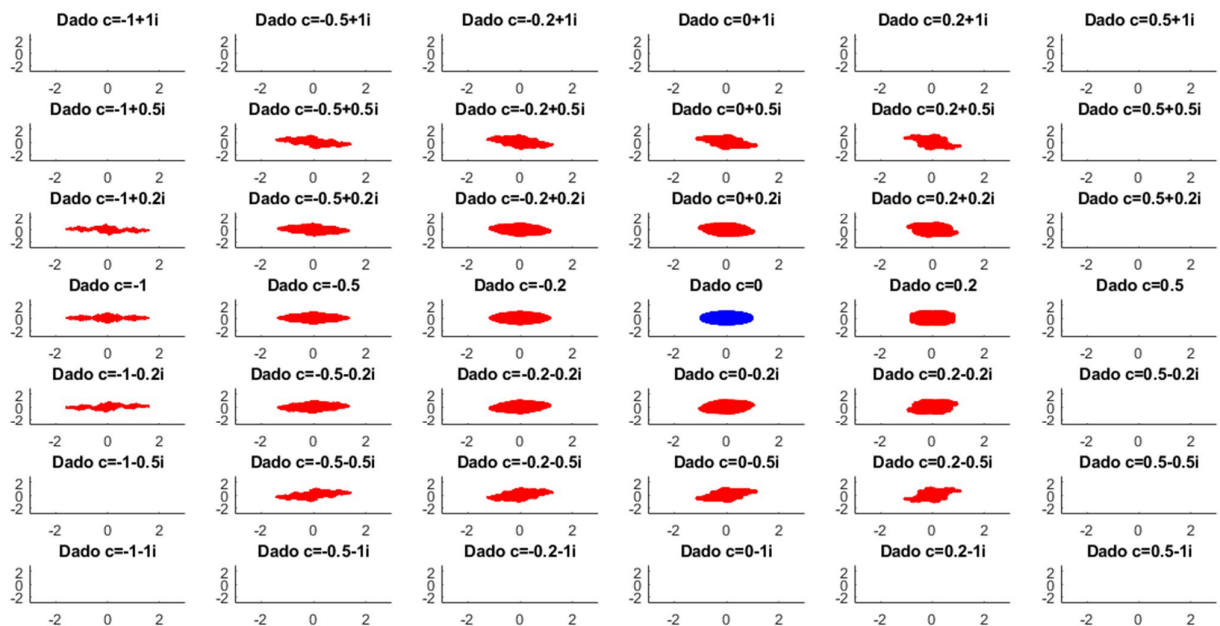
$$z_0 = z$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

En el caso de que la sucesión quede acotada, entonces el punto z pertenece al conjunto de Julia de parámetro c , de lo contrario queda excluido. Para facilitar las cuentas utilizaremos el siguiente lema:

Lema: si $|z_n| > 2$ entonces la sucesión diverge en el punto z

- ✓ Fraccionario
- Tabla resumen distintos α

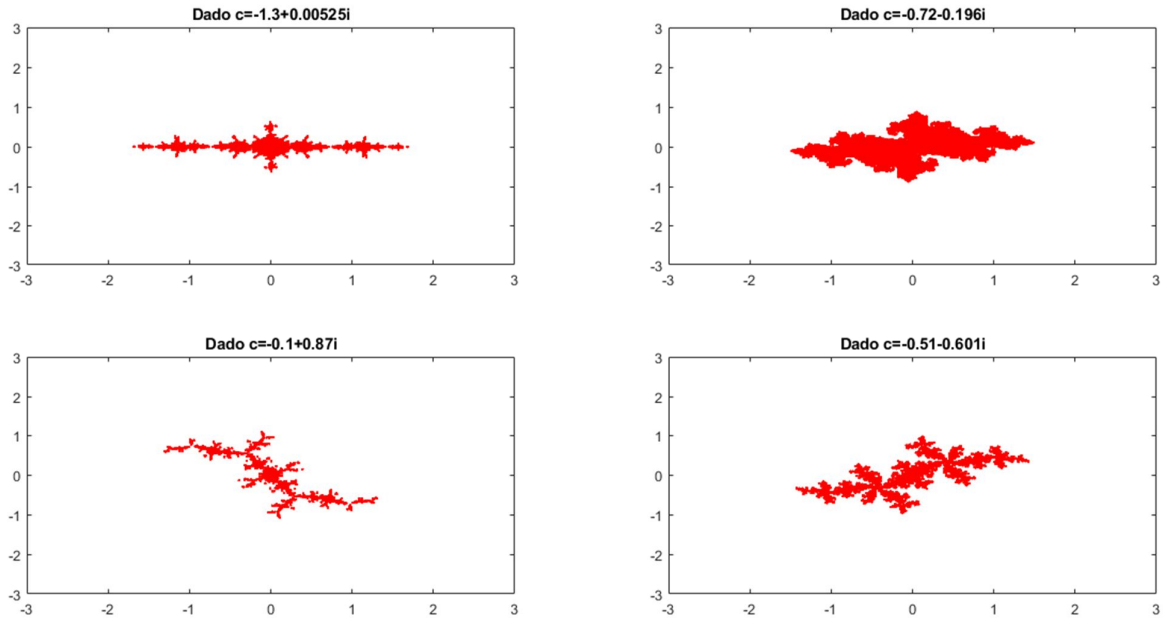


Podemos observar cómo se comporta la imagen dependiendo donde se encuentre. Nuestra imagen azul es la original, y según se desplaza se va deformando. Es destacable comentar que, en la última columna de la derecha, no se pintan más imágenes, desaparecen. Se

puede aplicar este tipo de fractal al desarrollo de cáncer humano, que aparece con una forma similar a alguna de las columnas de la izquierda y va variando su forma al igual que nuestra tabla de imágenes de izquierda a derecha, para terminar, desapareciendo por sí mismo.

También hay que destacar la simetría o reflexión existente entre la parte superior de la tabla y la inferior.

- Casos remarcables



5.3. Conjuntos de Mandelbrot

✓ Clásico

Como ya hemos comentado anteriormente, el conjunto de Mandelbrot es uno de los fractales más conocidos.

El conjunto de Mandelbrot se forma de manera similar a los conjuntos de Julia pero en este caso hay que definir un número complejo c .

Algoritmo:

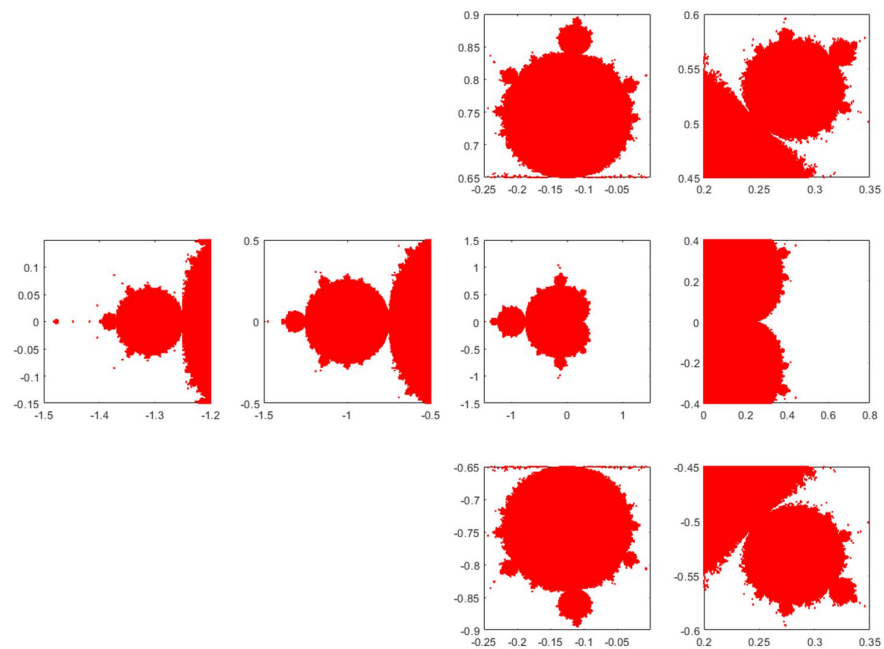
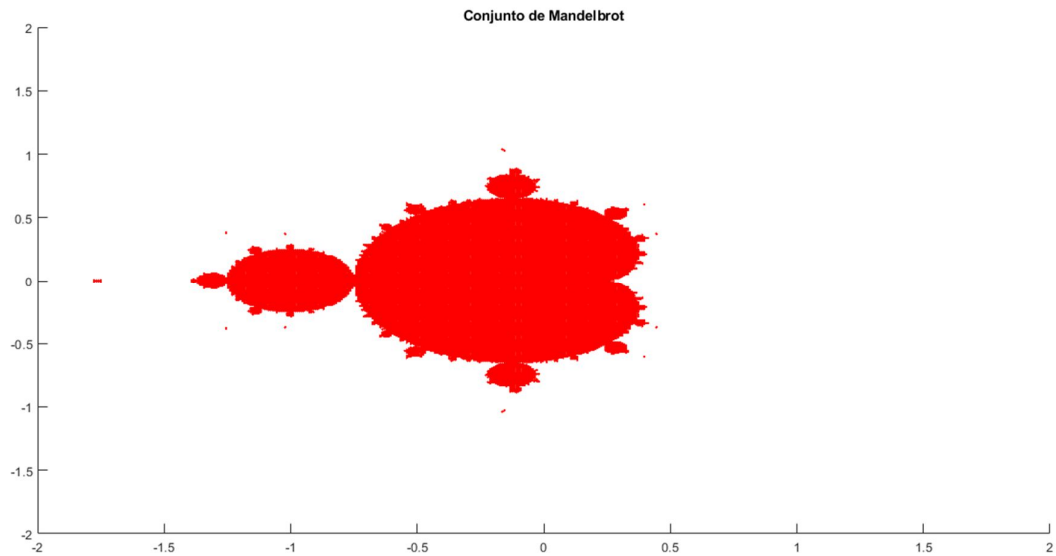
Se elije un número complejo c , se construye una sucesión por recursión:

$$z_0 = 0 \in \mathbb{C}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

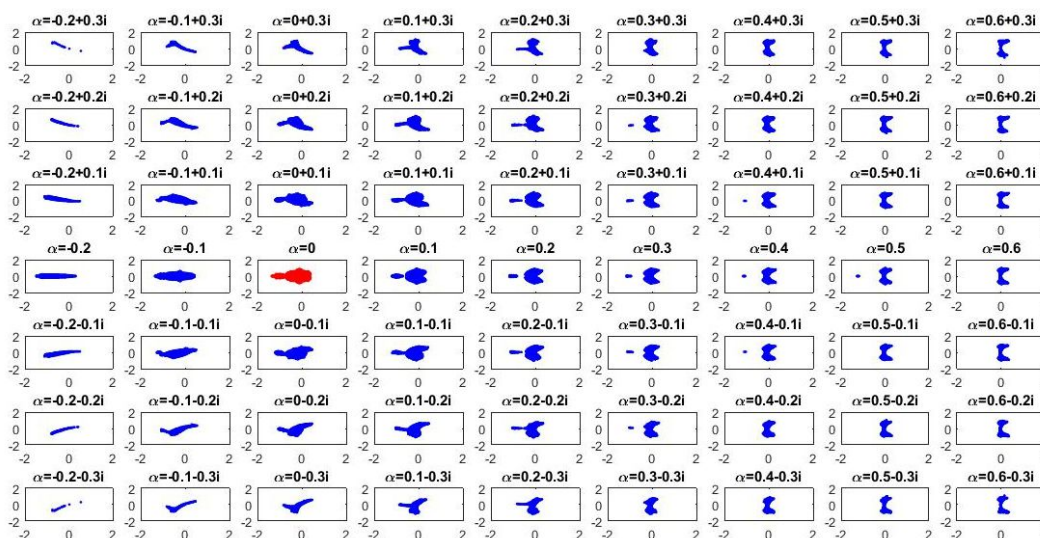
Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que c pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo.

De igual forma, utilizaremos el lema presentado en el conjunto de Julia para facilitar las cuentas.



Conclusiones: En el conjunto de Mandelbrot se puede observar cómo se reproduce la misma imagen haciendo zoom en cada uno de sus extremos. Así podemos observar como la imagen base se repite según recorremos el borde de dicha imagen.

- ✓ Fraccionario
- Tabla distintos α



Podemos observar cómo se comporta la imagen dependiendo donde se encuentre. Nuestra imagen roja es la original, y según se desplaza se va deformando.

De nuevo destacar la simetría o reflexión existente entre la parte superior de la tabla y la inferior. Es decir, la reflexión entre las imágenes de los fractales cuyo orden de derivación tiene la parte imaginaria positiva y las imágenes de los fractales cuyo orden de derivación tiene la parte imaginaria negativa.

Tema 6. Caos clásico y fraccionario. Atractor de Lorenz y de Rössler

6.1. El atractor de Lorenz

➤ Definición clásica

El atractor de Lorenz aparece cuando representamos el diagrama de las fases de la solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases}$$

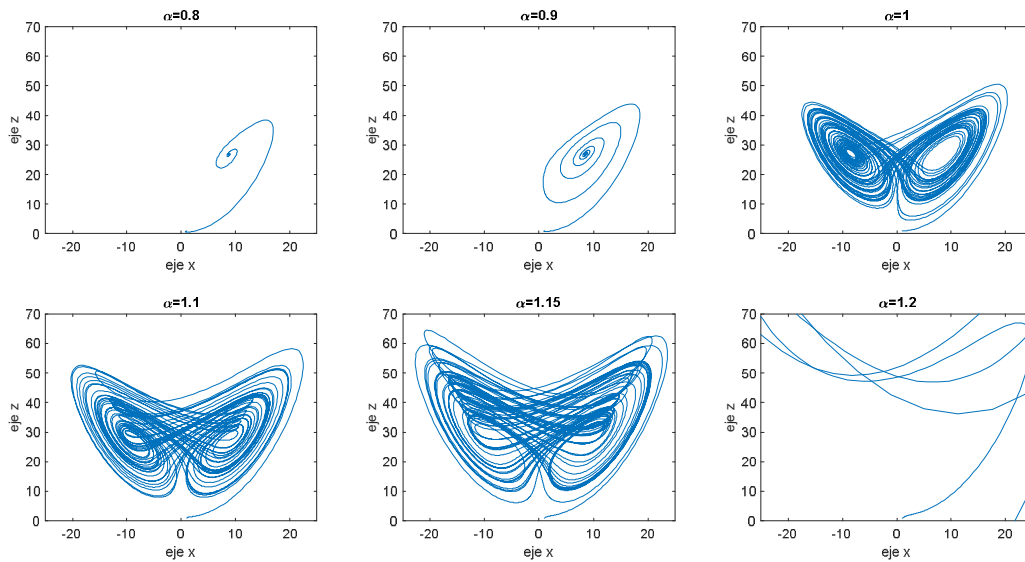
para los valores $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$.

Podemos obtener nuevos atractores caóticos sustituyendo la primera derivada por derivadas de orden fraccionario.

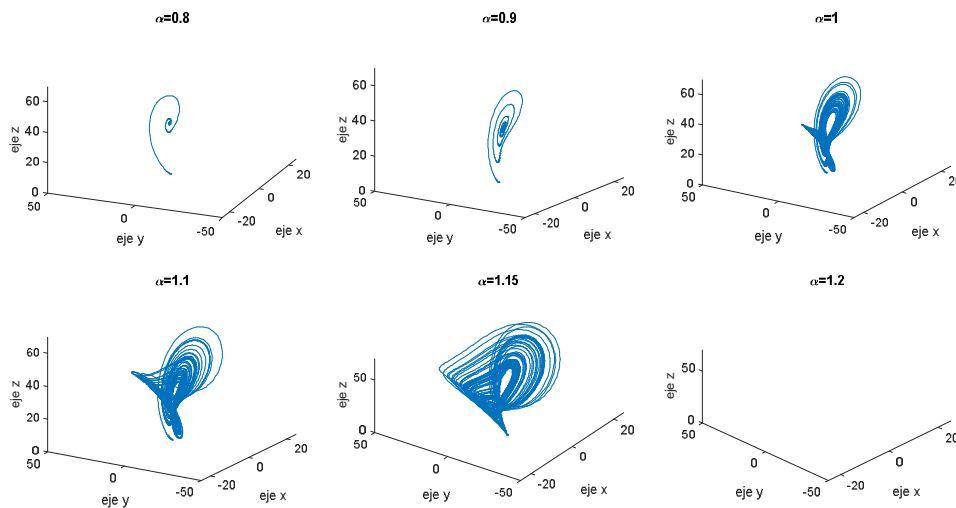
➤ Estudio fraccionario

- Caos fraccionario en atractores.

Imagen en dos dimensiones



- Imagen en tres dimensiones



Conclusiones

En el atractor de Lorenz se pueden observar claramente dos puntos de equilibrio. Un orden de derivación menor que uno afectara a este atractor modificando su comportamiento de forma que pierde energía y por tanto tiende a disipar. Por el contrario, con un α mayor que uno, el atractor ganaría energía, de esta forma llegamos a caos.

Por lo general sabemos que con un orden de derivación α pequeño la tendencia es cerrarse sobre sí mismo mientras que con α grande la tendencia es crecer y llegar a caos.

Esto se puede observar en el GIF del apéndice, en el cual para $\alpha = 0.8$ es atraído por un único punto (punto de equilibrio), mientras que al subir el valor de α , va expandiéndose, provocando que alrededor de $\alpha = 9.1$ de un brusco salto hacia un nuevo punto atractor (nuevo punto de equilibrio). Al seguir aumentando su valor, sigue expandiéndose, y esta vez teniendo los dos puntos anteriores como puntos atractores (tendrá dos puntos de equilibrio), con valor $\alpha = 0.98$ o superior.

Al sobrepasar el $\alpha = 1.6$ el atractor de Lorenz se expande de tal forma que se puede observar caos.

Es llamativo como una pequeña variación del orden de derivación puede provocar comportamientos tan distintos sobre el atractor de Lorenz.

6.2. El atractor de Rössler

➤ Definición clásica

Al integrar numéricamente el sistema de ecuaciones

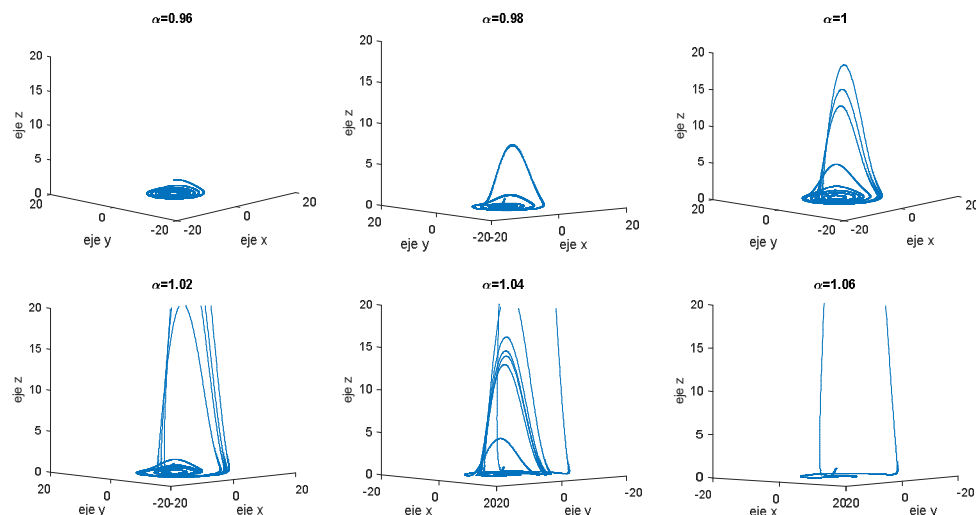
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

para los valores $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5$ y hacer el diagrama de las fases obtenemos un famoso atractor caótico, llamado atractor de Rössler.

➤ Estudio fraccionario

Caos fraccionario en atractores.

- Imagen en tres dimensiones



NOTA: Hay que tener en cuenta que a partir de $\alpha = 1.3$, el atractor se acerca al caos y por este motivo en el GIF del apéndice no se puede apreciar, habría que rotar la gráfica para observar los resultados, tal y como hemos hecho en el $\alpha = 1.3$ del apartado anterior

Conclusiones

De forma análoga al caso del atractor de Lorenz, el atractor de Rössler pierde o gana energía dependiendo del α que tomemos. Podemos observar que con $\alpha = 0.9$ el atractor de Rössler tiende a disipar, mientras que aumentando en centésimas el valor del α , va adquiriendo la forma de $\alpha = 1$ elevándose en el eje z.

Una vez que sobrepasa $\alpha = 1$, adquiere energía hasta llegar a caos.

Es remarkable observar que este atractor es mucho más inestable que el atractor de Lorenz. En este atractor, una variación centesimal del α modifica el comportamiento de manera alarmante.

Tema 7. Caos clásico y fraccionario. Ecuaciones en diferencias

7.1. Estudio de la dinámica de ecuaciones en diferencias.

- Una introducción al caos.

Vamos a realizar un estudio de forma gráfica de la dinámica de las siguientes ecuaciones en diferencias. A su vez, vamos a determinar si tiene puntos de equilibrio y en caso afirmativo estudiar su estabilidad.

- $x_{k+1} = \frac{x_k}{2}$
- $x_{k+1} = 3x_k$
- $x_{k+1} = x_k(x_k - 1)$
- $x_{k+1} = x_k(x_k + 1)$

Como caso remarkable para estudiar en mayor profundidad, tenemos la ecuación logística:

$$e. \quad x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k)$$

En el estudio de la ecuación logística vamos a representar gráficamente la dinámica tomando como punto inicial $x_0 = 0.9$ para los siguientes valores del parámetro $\lambda = 1.8$, $\lambda = 2.8$, $\lambda = 3.2$, $\lambda = 3.52$, $\lambda = 3.55$, y $\lambda = 3.89$.

La dinámica de una ecuación en diferencias se puede representar de la siguiente forma: Tomando la ecuación en diferencias $x_{k+1} = f(x_k)$ recorre los siguientes puntos:

$$(x_0, 0) \rightarrow (x_0, f(x_0)) \rightarrow (f(x_0), f(x_0)) \rightarrow (f(x_0), f(f(x_0))) \rightarrow \dots$$

Que de forma esquemática se puede ver como:

$$x = [x_0, x_0, f(x_0), f(x_0), f(f(x_0)), f(f(x_0)), \dots]$$

$$y = [0, f(x_0), f(x_0), f(f(x_0)), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots]$$

Para obtener la gráfica de la dinámica del sistema vamos a utilizar el siguiente procedimiento.

$x(1) = x_0$, con x_0 un dato inicial que tomamos en el intervalo adecuado,

$x(2) = x_0$

$y(1) = 0$

$y(2) = f(x(1))$

...

$x(k) = y(k-1)$

$y(k) = f(x(k-1))$

El algoritmo será el siguiente:

Paso 1: Dibujar la función $y = x$

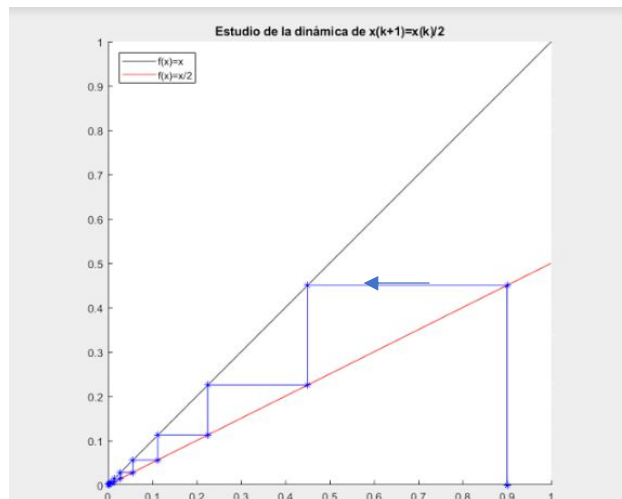
Paso 2: Dibujar la función $y = f(x)$

Paso 3: Calcular los vectores x e y con el esquema anterior.

Paso 4: Dibujar las funciones de los pasos 1 y 2 y los vectores x e y calculados en el paso

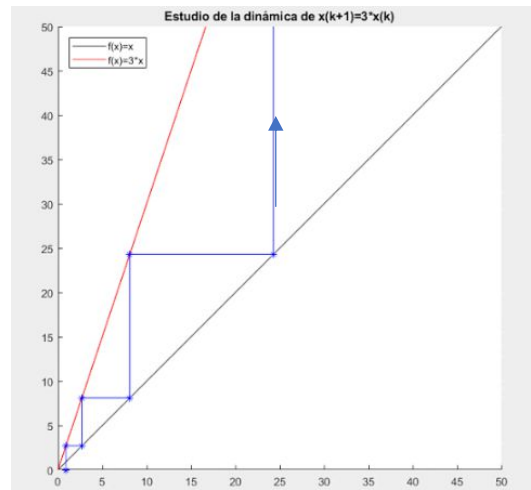
3. Hacer la gráfica final.

a. Estudio de la dinámica de $x(k+1)=x(k)/2$



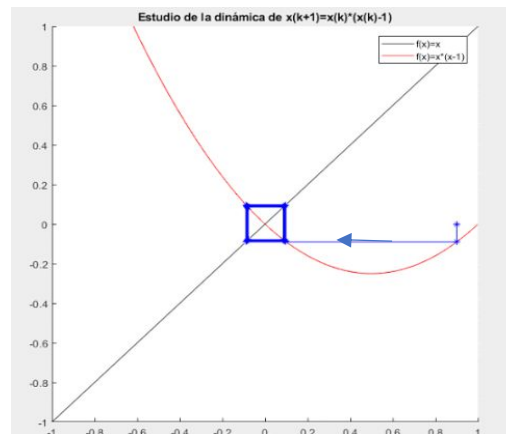
Conclusiones: Observamos que la dinámica es estable y su punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

b. Estudio de la dinámica de $x(k+1)=3*x(k)$



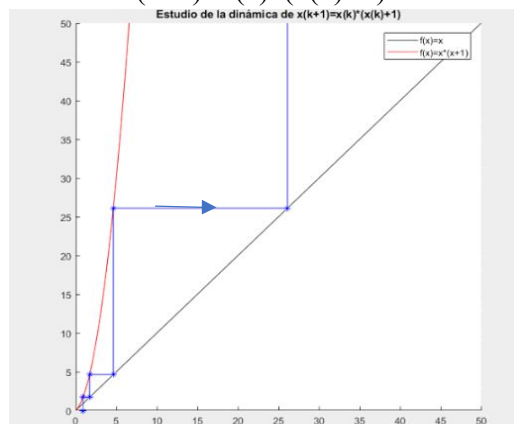
Conclusiones: Observamos que la dinámica es inestable.

c. Estudio de la dinámica de $x(k+1)=x(k)*(x(k)-1)$



Conclusiones: Observamos que la dinámica es estable formando una órbita.

d. Estudio de la dinámica de $x(k+1)=x(k)*(x(k)+1)$

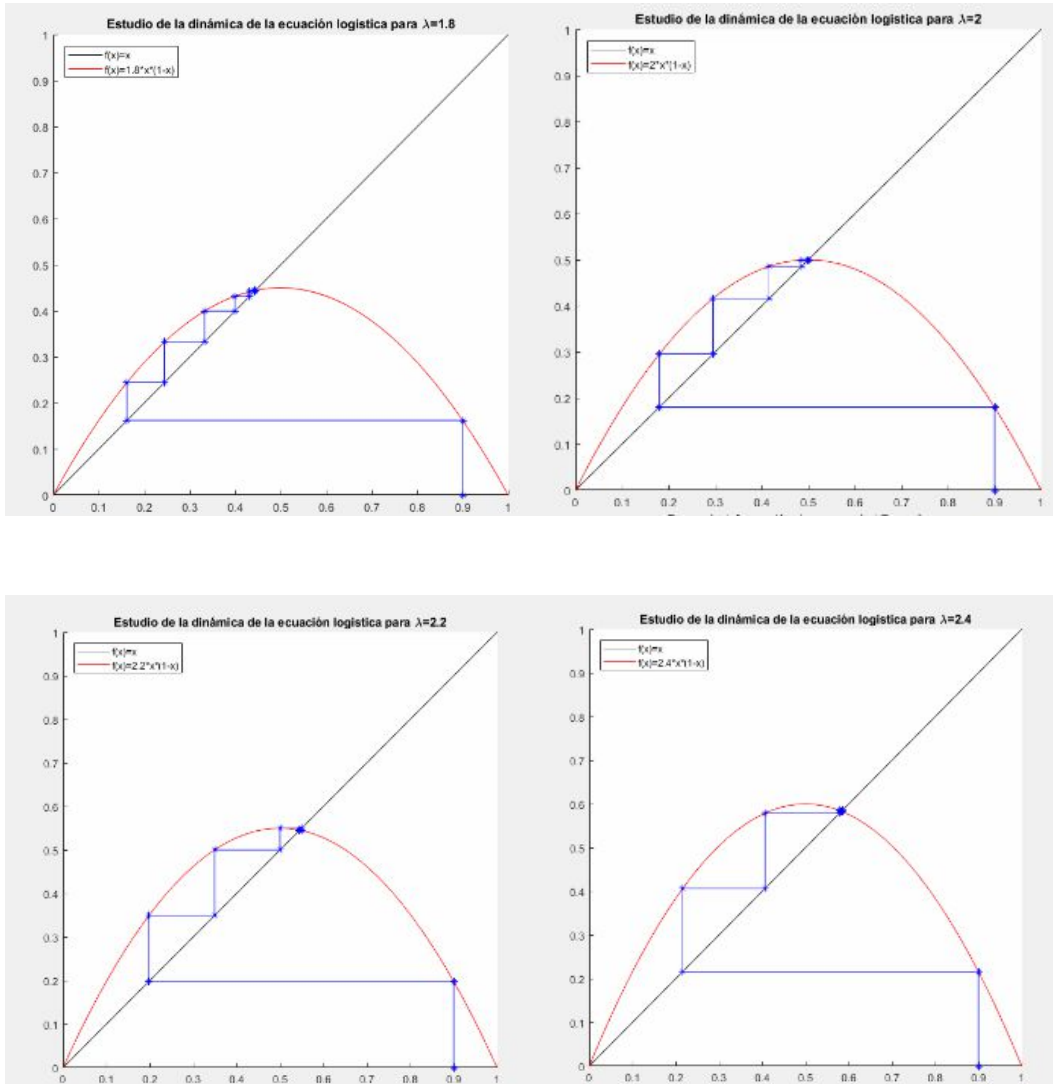


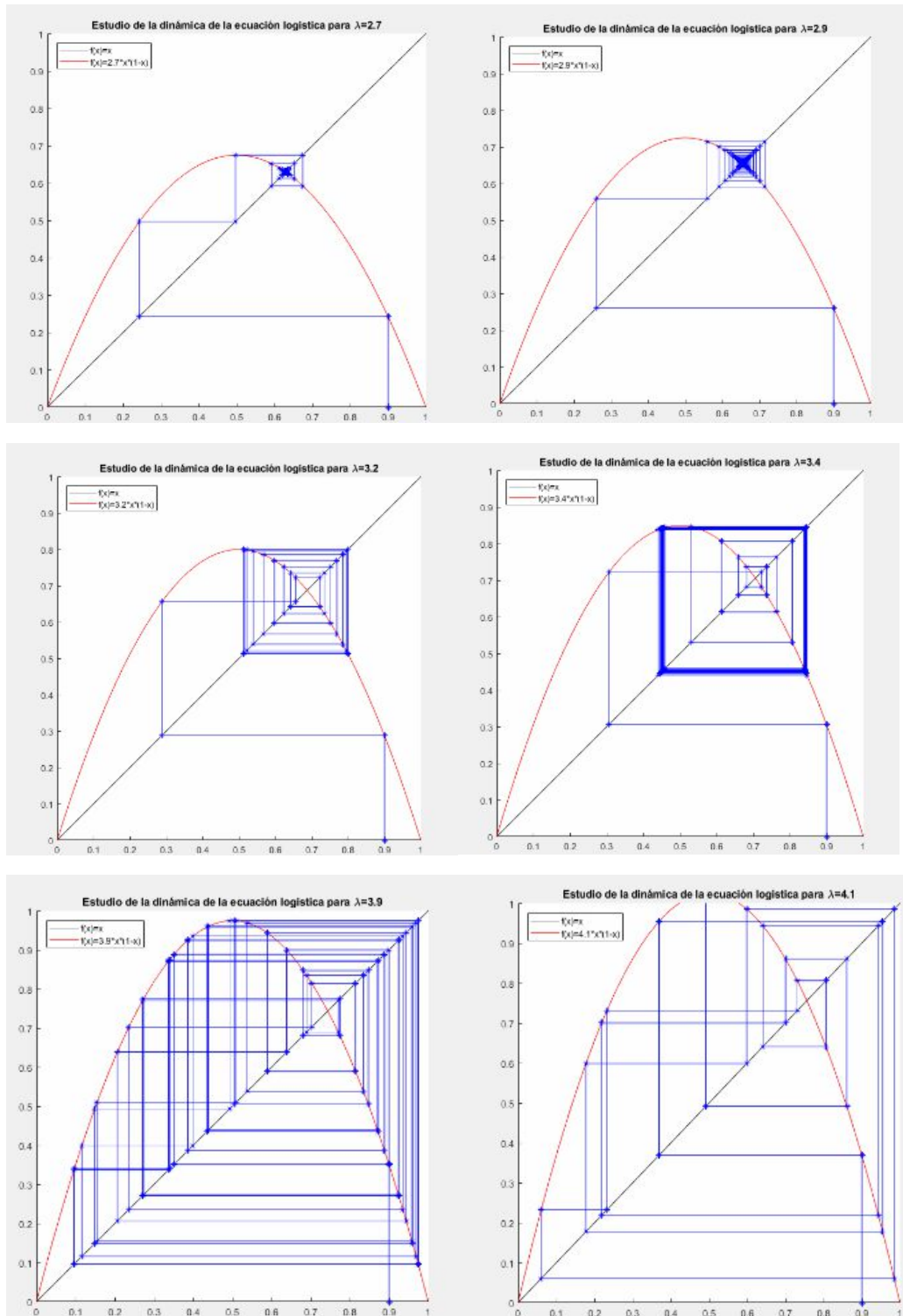
Conclusiones: Observamos que la dinámica es inestable.

7.2. Ecuación logística

- e. Estudio de la dinámica de la ecuación logística
 - Estudio de dinámica para distintos lambda

Para lambda pequeños, tarda más tiempo en cambiar al siguiente lambda porque muchas de las iteraciones las hace en el punto de equilibrio y no se aprecia el movimiento.



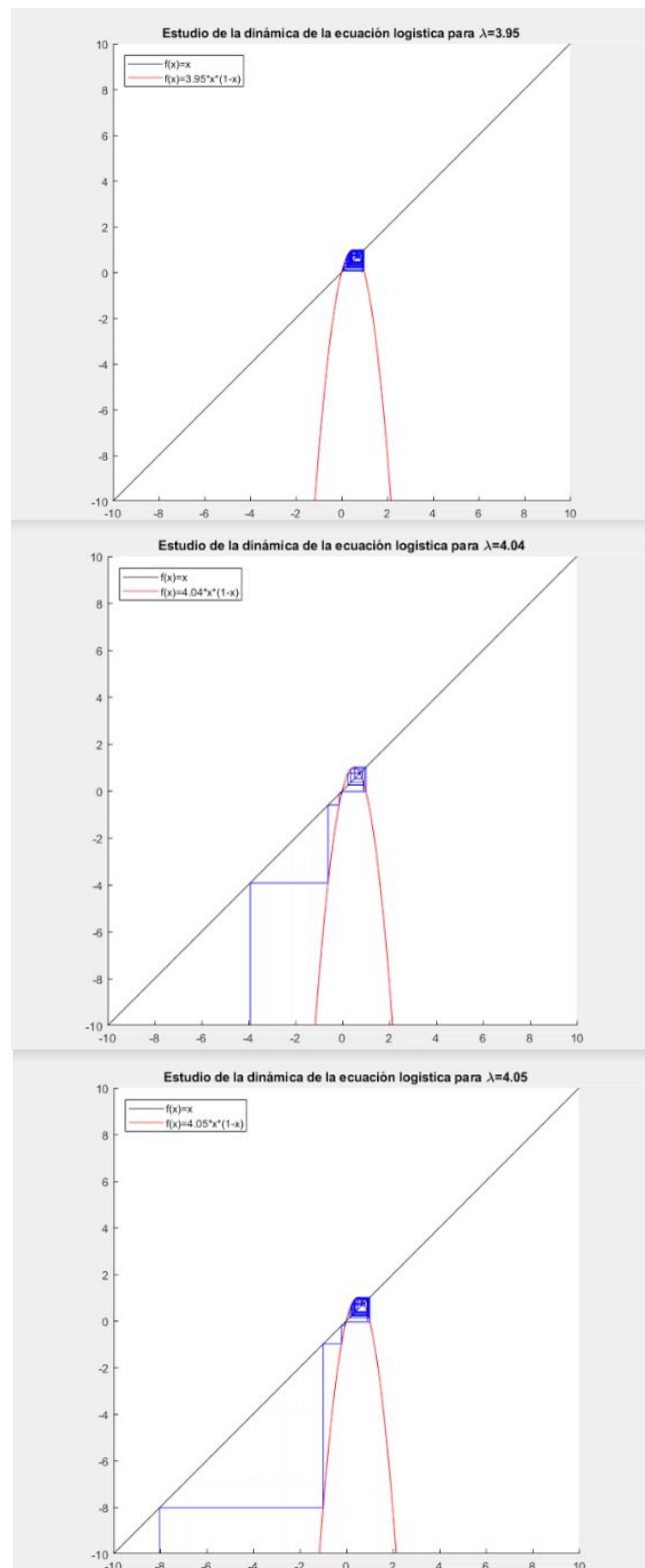


Conclusiones: Observamos que para lambdas pequeños se trata de una dinámica estable, mientras que, con el aumento de lambda, se van haciendo órbitas cada vez más grandes hasta que llega al caos.

En el siguiente apartado estudiaremos el caos de la ecuación logística.

7.3. Caos ecuación logística

- CAOS en la dinámica de la ecuación logística



Conclusiones: Observamos como la dinámica alcanza el caos a partir de $\lambda=4.01$. Es remarcable destacar como pasamos al caos con una pequeña variación centesimal.

7.4. Ecuaciones en diferencias fraccionarias

Para el estudio con memoria vamos a tomar una ecuación en diferencias de la forma $x_{i+1} = f(x_i)$.

El hecho de elegir esta ecuación es porque permite calcular un término utilizando únicamente el término anterior.

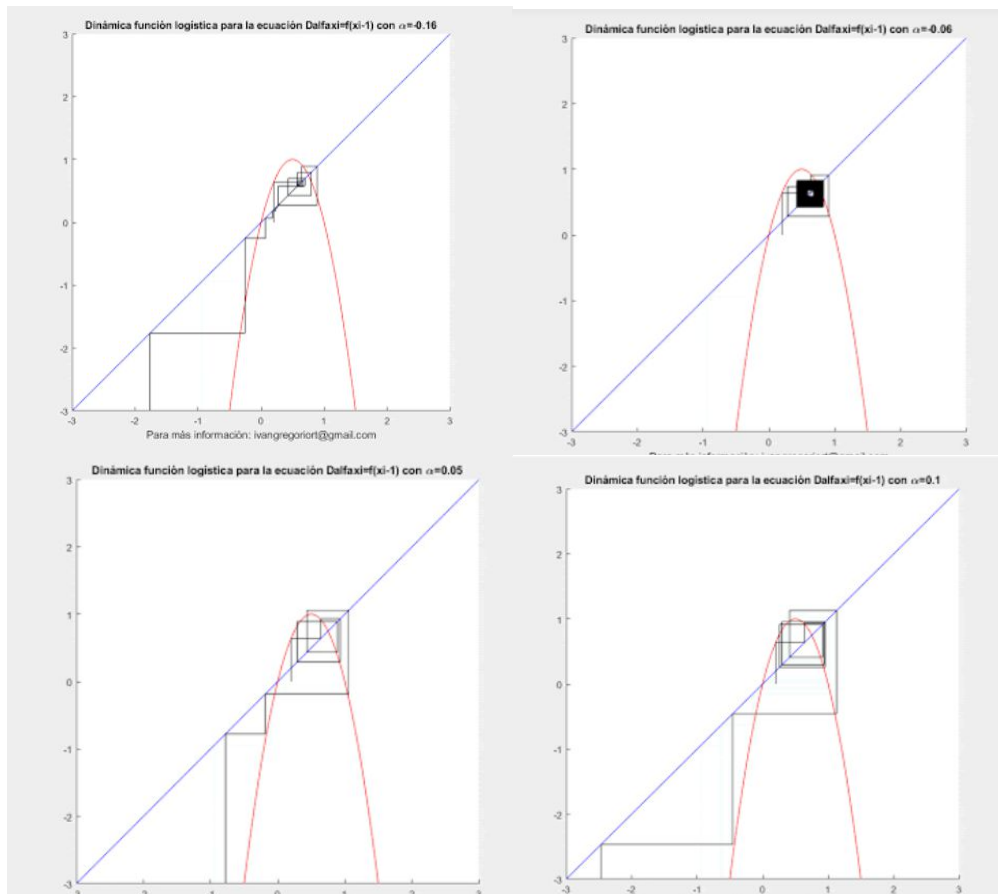
Podemos incorporar toda la información anterior al cálculo de un término mediante la ecuación en diferencias $(D^\alpha x)_i = f(x_i)$

Como hemos razonado en apartados anteriores, tomando $h=1$ podemos definir la derivada fraccionaria como la siguiente expresión:

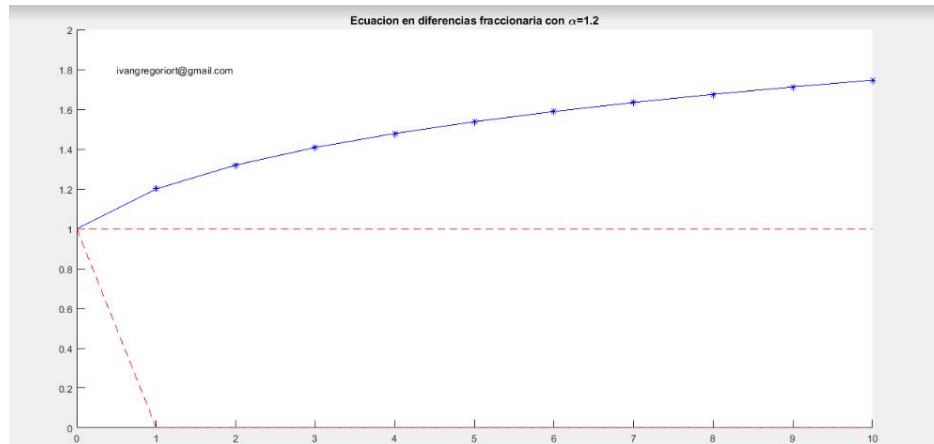
$$(D^\alpha x)_i = x_i - \frac{\alpha}{1} x_{i-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x_{i-2} - \dots + (-1)^i \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(i-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} x_0$$

Nota: Mediante esta definición se pueden utilizar valores de α positivos y negativos. En el caso de tratarse de un valor de $\alpha < 0$ Podemos identificar una derivada fraccionaria como una integral fraccionaria.

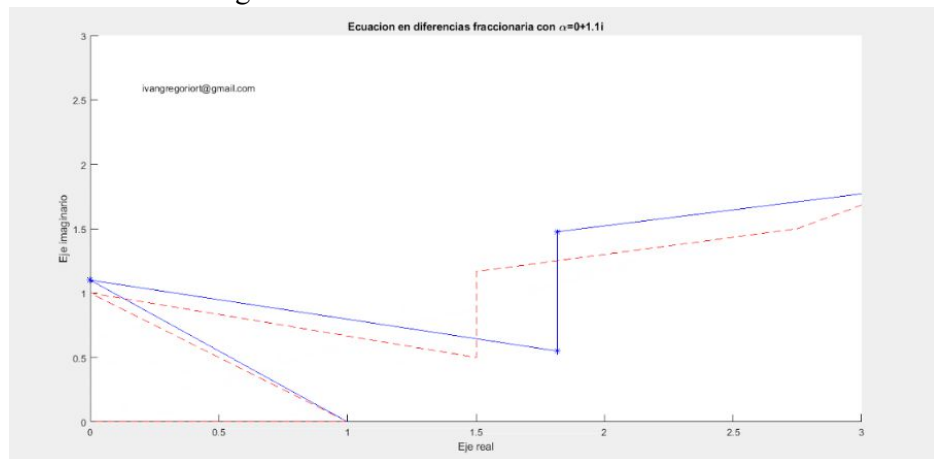
Dinámica fraccionaria de la función logística para la ecuación $D^\alpha x_i = f(x_i)$



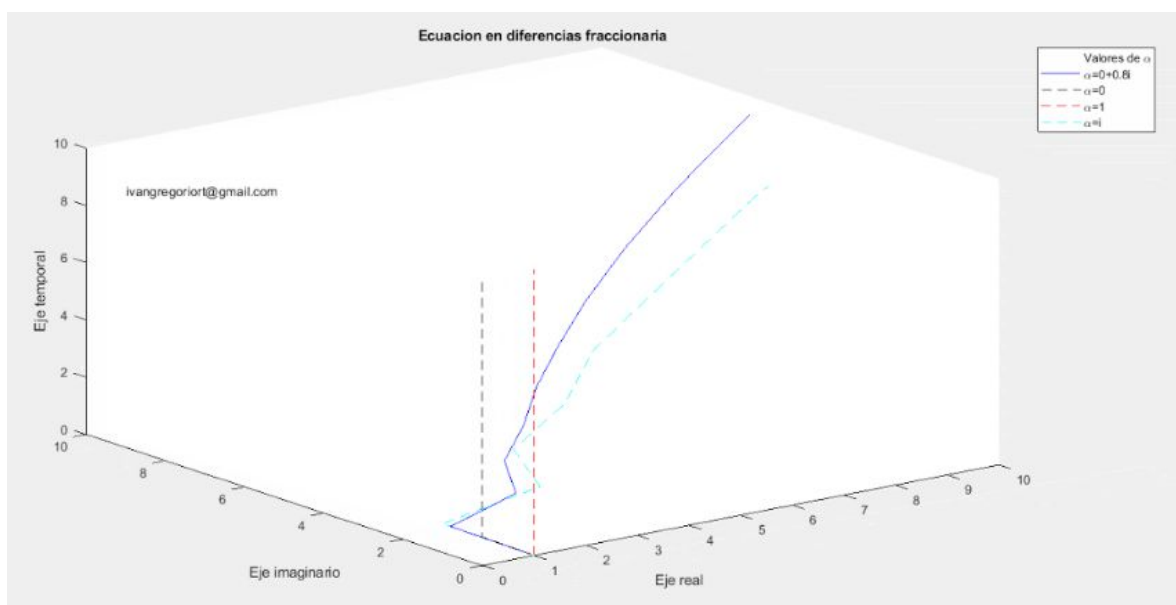
- Recorriendo α real



- Recorriendo α imaginario



- Recorriendo α imaginario (3 dimensiones)



APÉNDICE

1. Juegos geométricos

Podemos definir un cuadrado como una sucesión de puntos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ teniendo en cuenta que al tratarse de una línea poligonal cerrada tiene que existir una arista que una al punto x_4 con el punto x_1

Para este estudio vamos a definir la derivada fraccionaria discreta de orden α como

$$\overrightarrow{D^\alpha x} = (D^\alpha x_1, D^\alpha x_2, D^\alpha x_3, D^\alpha x_4)$$

Generalizando a cualquier polígono, tenemos que una línea poligonal cerrada de k nodos se puede definir como $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ y su derivada fraccionaria discreta de orden α como $\overrightarrow{D^\alpha x} = (D^\alpha x_1, D^\alpha x_2, \dots, D^\alpha x_k)$

Utilizando la definición de derivada fraccionaria

$$(D^\alpha f)_k = \frac{f_k - \frac{\alpha}{1} f_{k-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} f_{k-2} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} f_0}{h^\alpha}$$

tomando $h=1$ nos quedará

$$(D^\alpha x)_k = x_k - \frac{\alpha}{1} x_{k-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x_{k-2} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x_0$$

Se puede resumir en la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{cases} (D^\alpha x)_k = x_k + \overrightarrow{c_{k-1}} \cdot \overrightarrow{x_{k-1}} \\ (D^\alpha x)_1 = x_1 \end{cases} \text{ con } k = 1, 2, \dots, N$$

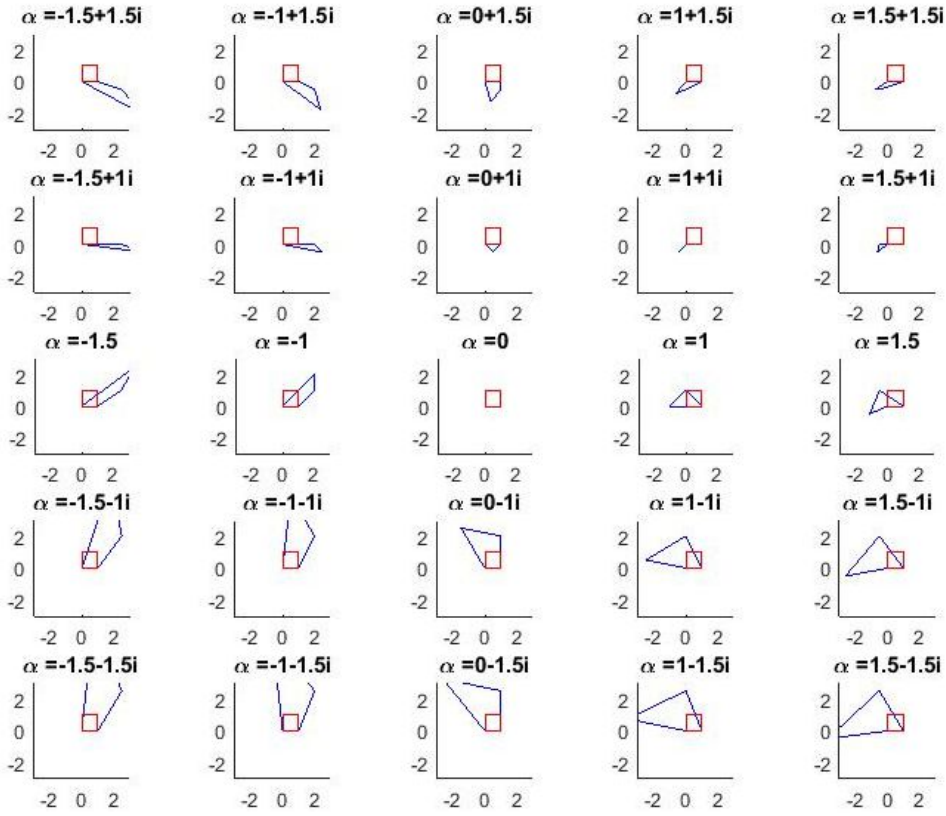
Donde:

$$\overrightarrow{c_k} = \left((-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{k!}, \overrightarrow{c_{k-1}} \right)$$

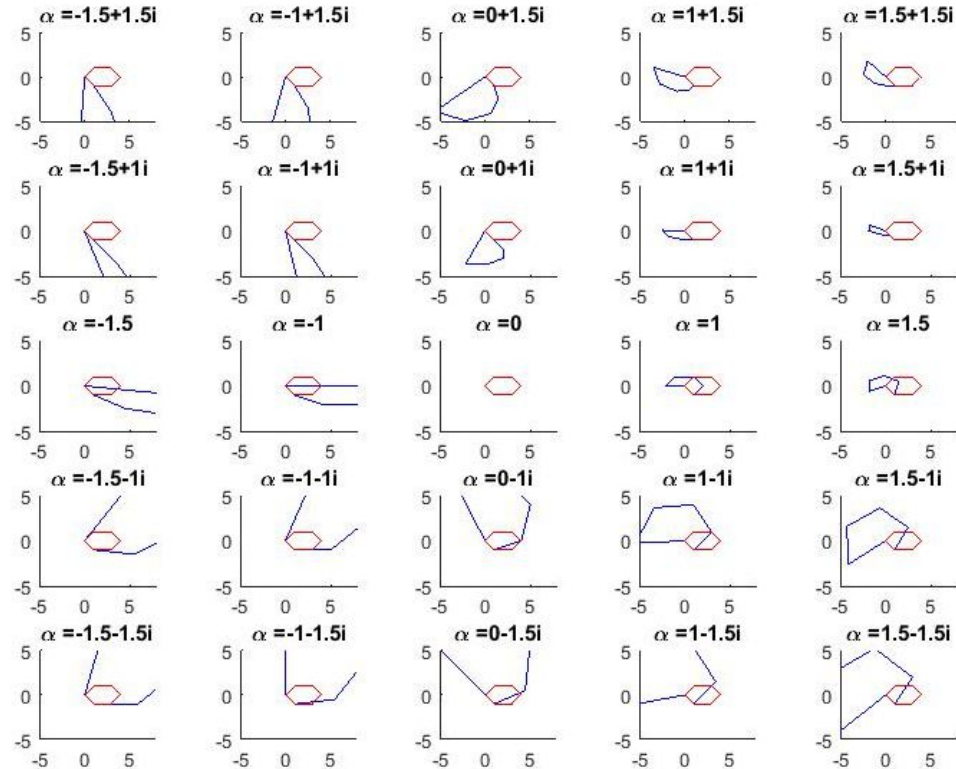
$$\overrightarrow{x_k} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Veamos algunos comportamientos tomando líneas poligonales cerradas en el plano complejo:

- Cuadrado $\vec{x}_4 = (0, 1, 1 + i, i)$



- Hexágono $\vec{x}_4 = (0, 1 - i, 3 - i, 4, 3 + i, 1 + i)$



2. Imágenes dinámicas

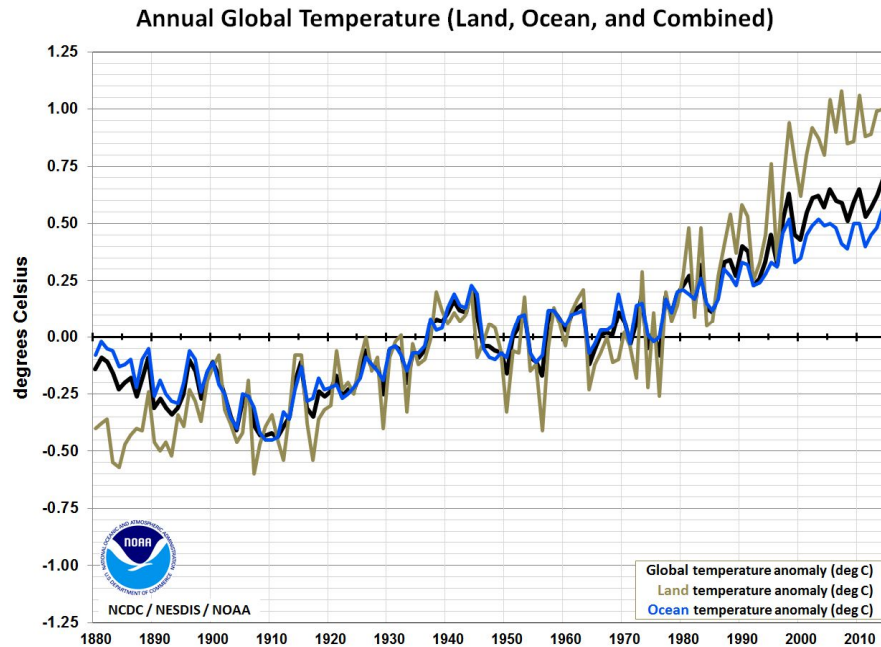
Para un mejor estudio de los temas tratados anteriormente, es necesaria la visualización de los GIF localizados en las siguientes url:

- Tema 4. Difusión clásica, fraccionaria y compleja
 - Un paseo aleatorio con distintos α
https://drive.google.com/open?id=1Hvyv5EuG_sSsd84FG4Q4NLhM3ux7se32
 - Movimiento de partículas en el plano complejo
https://drive.google.com/open?id=16kH953iwmcT_ZqjY-YoanzMPLfF-jsmx
<https://drive.google.com/open?id=1vkrLJ2OzBeSknr5KPpcQQGu6UmGUZBfu>
- Tema 5. Fractales clásicos y fraccionarios
 - Conjunto de Mandelbrot recorriendo α real
<https://drive.google.com/open?id=1WMFM41Suaq1sTGqIGTpdzNpAak9zrTVo>
 - Conjunto de Mandelbrot recorriendo α imaginario
https://drive.google.com/open?id=1FJGTW1W5FRbC9-kweoMPZxsFolk4_JRx
 - Conjunto de Mandelbrot acumulado recorriendo α real
https://drive.google.com/open?id=1thPpoKZrG1NmJ_lAbF-BwJ3xaF64BMAv
 - Conjunto de Mandelbrot acumulado recorriendo α imaginario
<https://drive.google.com/open?id=14MUXwlOAsf8cYWjfn5HzhMTC9n54i-9U>
- Tema 6. Caos clásico y fraccionario. Atractores de Lorenz y de Rössler
 - Atractor de Lorenz
https://drive.google.com/open?id=1PLuyKI_OyHL343qX1bYGmkBEypOKEo_x
 - Atractor de Rössler
<https://drive.google.com/open?id=1H-eRUgHwSEwaukzh1Ser6yCBZigicYIR>
- Tema 7. Caos clásico y fraccionario. Ecuaciones en diferencias
 - Estudio de la dinámica de $x(k+1)=x(k)/2$
https://drive.google.com/open?id=1SN5ywho_2rmpQ1hfJvpyJ21oY6XL8QFJ
 - Estudio de la dinámica de $x(k+1)=3*x(k)$
<https://drive.google.com/open?id=1O6giS9tB2VLrEBGHR64QWqooLSIq3NCV>
 - Estudio de la dinámica de $x(k+1)=x(k)*(x(k)-1)$
<https://drive.google.com/open?id=1htYqlnfodgVNVhuUEpcZF65q1AlzxX2>
 - Estudio de la dinámica de $x(k+1)=x(k)*(x(k)+1)$
https://drive.google.com/open?id=1P2RSiGG8WH3pOhG_uxtaZprSnMvJxclq
 - Estudio de la dinámica de la ecuación logística
https://drive.google.com/open?id=1OO-7vlozjIw2ff2vLOWjSIWCKu_BivcO
 - CAOS en la dinámica de la ecuación logística
https://drive.google.com/open?id=1hXkUP7HiiFnMMfWcV6OHGqH_Pi2yOYS6
 - Dinámica fraccionaria de la función logística para la ecuación Dalfaxi= $f(x_i-1)$
https://drive.google.com/open?id=1uEzT1snGtXQ_mWyPQ1GJXHkxCZb6AcJ5

- Recorriendo α real
<https://drive.google.com/file/d/1Z1nIVrDmMH1yBioKkoMxFaOWdVDgmjmM/view?usp=sharing>
 - Recorriendo α imaginario
<https://drive.google.com/file/d/14Kpplbga4388Q6xO5scBEWgNpmPMnJ1l/view?usp=sharing>
 - Recorriendo α imaginario (3 dimensiones)
<https://drive.google.com/file/d/1ZMb6MEAp65YSTLu5kooTDeiYP0A0EcZ/view?usp=sharing>
- Juegos geométricos
 - Cuadrado fraccionario recorriendo α real
<https://drive.google.com/open?id=1EzI-Mtl2ePpKQJG-emxdNIMDXhmyBUB>
 - Cuadrado fraccionario recorriendo α imaginario
<https://drive.google.com/open?id=1hy-VzCPiifhh71PlySNUCKCr82HSqRzU>
 - Hexágono fraccionario recorriendo α real
https://drive.google.com/open?id=1ej8JJZM-xYnO7wKhhl_1IzunVyEexdfp
 - Hexágono fraccionario recorriendo α imaginario
<https://drive.google.com/open?id=1JDSZIRutRVzQrrhbf-iX6MdDVDSErvtK>

3. Algunas aplicaciones físicas del cálculo fraccionario

- El cálculo fraccionario está muy ligado a la física. Numerosos experimentos pueden ser modelados por este tipo de derivadas. Por ejemplo, si tenemos una nube de particular en un medio y estas se mueven de forma aleatoria para cualquier dirección, podemos aplicarle distintas derivadas de forma que se modifica la velocidad con la que se propagan e incluso podemos lograr que roten en una misma dirección.
- Otro caso llamativo es la predicción de la lluvia en una determinada zona. Aplicando derivadas fraccionarias tenemos mayor flexibilidad a la hora de buscar la similitud con un comportamiento de la naturaleza puesto que, por ejemplo, entre la derivada de orden 0.01 y 1 tenemos infinitos órdenes.
- A lo largo de los últimos años se ha estado midiendo la temperatura media de la tierra y hay estudios que utilizan Análisis fraccionario para adaptar el comportamiento a una determinada función y obtener la temperatura en el océano, la superficie terrestre y combinando ambas. Esta es la imagen cedida por dicho estudio:



4. Codificación de algunas de las tablas y GIF. Creado con Matlab

a. Atractor de Lorenz

```
clear all

a=0;

b=50;

N=10000;

h=(b-a)/N;

%Datos de entrada

A=10;

B=28;

C=8/3;

x0=1;

y0=1;

z0=1;

%%%

f1=@(t,x,y,z) [A*(y-x)];

f2=@(t,x,y,z) [x*(B-z)-y];

f3=@(t,x,y,z) [x*y-C*z];

valores_alfa=[0.8,0.9,1,1.1,1.15,1.2];

%valores_alfa=[1];

pos=0;

for m=1:length(valores_alfa)

    clear CC, clear x, clear y, clear z, clear t

    t(1)=a;

    x(1)=x0;

    y(1)=y0;

    z(1)=z0;

    alfa=valores_alfa(m);

    aux=1;

    CC(1)=aux; %coeficientes

    for i=2:N+1

        t(i)=t(i-1)+h;

        aux=aux*(-1)^(alfa-(i-2))/(i-1);

        CC=[aux,CC];

        x(i)=-CC(1:(i-1))*x'+h^(alfa)*f1(t(i-1),x(i-1),y(i-1),z(i-1));
```



```

        y(i)=-CC(1:(i-1))*y'+h^(alfa)*f2(t(i-1),x(i-1),y(i-1),z(i-1));
        z(i)=-CC(1:(i-1))*z'+h^(alfa)*f3(t(i-1),x(i-1),y(i-1),z(i-1));
    end

    %dibujo de la función
    pos=pos+1;
    subplot(2,3,pos);                %posicion en la tabla
    plot3(x,y,z)
    alfa=num2str(alfa);
    title(strcat('\alpha=',alfa)) %titulo
    axis([-25 25 -50 50 0 70])        %fijamos los ejes
    xlabel('eje x');
    ylabel('eje y');
    zlabel('eje z');
end

```

b. Atractor de Rossler

```

%Programa atractor de Rossler
clear all
a=0;
b=50;
N=10000;
h=(b-a)/N;
%Datos de entrada
A=0.2;
B=0.2;
C=5;
x0=1;
y0=1;
z0=1;
%%%
f1=@(t,x,y,z)[-y-z];
f2=@(t,x,y,z)[x+A*y];
f3=@(t,x,y,z)[B+z*(x-C)];

```

```

axis([-20 20 -20 20 0 20])

%Primera imagen de GIF

drawnow

frame = getframe(1);

im = frame2im(frame);

[A,map] = rgb2ind(im,256);

imwrite(A,map,'Rossler.gif','gif','LoopCount',Inf,'DelayTime',0.05);

valores_alfa=[0.9:0.005:1.05]; %valores que tomara Alpha

for m=1:length(valores_alfa)

    clear CC, clear x , clear y , clear z , clear t

    t(1)=a;

    x(1)=x0;

    y(1)=y0;

    z(1)=z0;

    alfa=valores_alfa(m);

    aux=1;

    CC(1)=aux; %coeficientes

    for i=2:N+1

        t(i)=t(i-1)+h;

        aux=aux*(-1)*(alfa-(i-2))/(i-1);

        CC=[aux,CC];

        x(i)=-CC(1:(i-1))*x'+h^(alfa)*f1(t(i-1),x(i-1),y(i-1),z(i-1));

        y(i)=-CC(1:(i-1))*y'+h^(alfa)*f2(t(i-1),x(i-1),y(i-1),z(i-1));

        z(i)=-CC(1:(i-1))*z'+h^(alfa)*f3(t(i-1),x(i-1),y(i-1),z(i-1));

    end

    %dibujo de la función

    plot3(x,y,z)

    alfa=num2str(alfa)

    title(strcat('Atractor de Rössler\alpha=',alfa)) %titulo

    axis([-20 20 -20 20 0 20]) %fijamos los ejes

    xlabel({'eje x','Para más información:'
    ivangregoriort@gmail.com});

```

c. Dinámica ecuación logística

```
%Programa sobre el estudio de la dinámica de ecuación logística

clear all

hold on

%Datos

datoinicialx=0.9;

numeroiteraciones=100;

casolamb=[1.8:0.1:4.2]); %valores de lambda

%Recta x=y

xb=[-10 10];

yb=[-10 10];

%Primera imagen del GIF

axis([0 1 0 1]);

daspect([1 1 1])

drawnow

frame = getframe(1);

im = frame2im(frame);

[A,map] = rgb2ind(im,256);

imwrite(A,map,'dinamica.gif','gif','LoopCount',Inf,'DelayTime',0.01);

hold off

%Programa principal

for caso=1:length(casolamb)

    clf

    clear x, clear y

    hold on

    lambda=casolamb(caso);

    %titulo

    titu=num2str(lambda);

    title(strcat('Estudio de la dinámica de la ecuación logística para \lambda=',titu))

    xlabel('Para más información: ivangregoriort@gmail.com')

    %Dibujamos la recta x=y

    p1=plot(xb,yb,'k');

    %Dibujamos la grafica de la ecuación logística
```

```

f=@(x) [lambda*x*(1-x)];
a=-10;
b=10;
N=1000;
h=(b-a)/N;
xc(1)=a;
yc(1)=f(xc(1));
for k=1:N-1
    xc(k+1)=xc(k)+h;
    yc(k+1)=f(xc(k+1));
end
p2=plot(xc,yc,'r');
%dinamica
x(1)=datoinicialx;
x(2)=x(1);
y(1)=0;
y(2)=f(x(1));
for k=1:2
    plot(x(k),y(k),'b*')
end
%bucle
for k=3:numeroiteraciones
    x(k)=y(k-1);
    y(k)=f(x(k-1));
    plot(x,y,'b')
    plot(x(k),y(k),'b*')
    %leyenda
    nombrefun=strcat('f(x)=',titu,'*x*(1-x)');
    legend([p1 p2],{'f(x)=x',nombrefun},'Location','northwest')

    %Guardamos imagen en el GIF
    axis([0 1 0 1]);
    daspect([1 1 1])
    drawnow

```

```

        frame = getframe(1);
        im = frame2im(frame);
        [A,map] = rgb2ind(im,256);

        if k==numeroiteraciones
            imwrite(A,map,'dinamica.gif','gif','WriteMode','append','DelayTime',2)
            ;
        else
            imwrite(A,map,'dinamica.gif','gif','WriteMode','append','DelayTime',0.08);
        end
    end
    hold off
end

```

d. Dinámica fraccionaria ecuación en diferencias

```

%dinámica fraccionaria de Dalfaxi=f(xi-1)

clear all

%DIBUJO DE LAS FUNCIONES LOGISTICA E IDENTIDAD

aa=-3;
bb=3;
NN=1000;
h=(bb-aa)/NN;

%Primera imagen del GIF

hold on
axis([-3 3 -3 3]);
daspect([1 1 1])
drawnow

frame = getframe(1);
im = frame2im(frame);
[A,map] = rgb2ind(im,256);
imwrite(A,map,'ecdiffrac.gif','gif','LoopCount',Inf,'DelayTime',0.1);
hold off

%DATOS-----

A=4; %parámetro de la función logística
nmax=700; %número máximo de iteraciones. Tomarlo par
f=@(x) [A*x*(1-x)];

```

```

f1=@(x1) [x1]; %recta y=x
f2=@(x2) [A*x2*(1-x2)];
casoalfa=(-0.3:0.01:0.3);
for caso=1:length(casoalfa)
    clf
    clear x, clear y
    hold on
    alfa=casoalfa(caso);
    %titulo
    titu=num2str(alfa);
    title(strcat('Dinámica función logística para la ecuación
Dalfaxi=f(xi-1) con \alpha=',titu))
    xlabel('Para más información: ivangregoriort@gmail.com')
    %DATOS-----
    xx(1)=aa;
    yy(1)=f(xx(1));
    for k=2:NN+1
        xx(k)=xx(k-1)+h;
        yy(k)=f(xx(k));
    end
    % DIBUJO DE FUNCIONES
    plot(xx,yy,'r')
    fplot(f1,'b')
    %DINÁMICA DEL SISTEMA
    %inicio de la dinámica
    i=1;
    CC(1)=1;
    dato_inicial=0.2;
    x(1)=dato_inicial;
    y(1)=0;
    xdefinitivo(1)=x(1);
    x(2)=x(1);
    y(2)=f(x(1));
    plot(x,y,'black')
    %pause(0.5)

```

```

for k=3:2:nmax+1
    x(k)=y(k-1);
    y(k)=x(k); %movimiento horizontal
    x(k+1)=x(k);
    i=i+1;
    xdefinitivo(i)=x(k);
    aux=CC(1)*(-1)*(alfa-(i-2))/(i-1);
    CC=[aux,CC];
    y(k+1)=-CC(1:i-1)*xdefinitivo(1:i-1)+f(x(k+1));
    plot(x,y,'black')
    %pause(0.1)
end
%Guardamos imagen en el GIF
axis([-3 3 -3 3])
daspect([1 1 1])
drawnow
frame = getframe(1);
im = frame2im(frame);
[A,map] = rgb2ind(im,256);

imwrite(A,map,'ecdiffrac.gif','gif','WriteMode','append','DelayTime',1);
hold off
end

```

e. Conjuntos de Julia

```

clear all
valor_real=[-1,-0.5,-0.2,0,0.2,0.3];
valor_imag=[i,0.5*i,0.2*i,0,-0.2*i,-0.5*i,-i];
pos=0;
for l=1:length(valor_imag)
    for t=1:length(valor_real)
        c=valor_real(t)+valor_imag(l);
        pos=pos+1
        clear x, clear h, clear k
        %parametros
    end
end

```

```

aa=-3;
bb=3;
cc=-3;
dd=3;
N=200;

% Representa el conjunto de Julia de parámetro c en
[a,b]x[c,d].

vreal=linspace(aa,bb,N);
vimag=linspace(cc,dd,N);

hold on

subplot(7,5,pos)

for h=1:N
    for k=1:N
        j=0;
        z=vreal(h)+i*vimag(k); %formamos el numero complejo
        while j<N & abs(z)<2
            z1=z^2+c;
            z=z1;
            j=j+1;
        end
        if abs(z)<2
            x(h,k)=vreal(h)+i*vimag(k);
        else
            x(h,k)=100; % si no esta acotado pintar un punto
        end
        %lejos para que no se vea
    end
end
h

end

if c==0
    plot(x,'b.') %El caso con c=0 lo pintamos azul
else
    plot(x,'r.')
end

title(strcat('Dado c=',num2str(c)))

axis([aa bb cc dd])

```



```

        hold off
    end
end

f. Difusión

clear all

Pmax=1; %numero de particulas o paseos
Nmax=200; %numero de iteracciones o pasos en cada paseo
limit=30;
ejexy=-limit:1:limit;
color(1)='g';
color(2)='c';
color(3)='b';
aleatorio(Pmax,Nmax)=0;
for h=1:Pmax
    for k=2:Nmax
        aleatorio(h,k)=(-1)^randi(2);
    end
end

ejex=1:Nmax;
vAlfa=[0.5,1,1.2];
for t=1:length(vAlfa)
    alfa=vAlfa(t);
    x(Pmax,Nmax,t)=0;
    for h=1:Pmax
        clear CC; clear xa;
        aux=1;
        CC(1)=aux;
        xa(1)=0;
        for k=2:Nmax
            aux=aux*(-1)*(alfa-(k-2))/(k-1);
            CC=[aux,CC];
            xa(k)=-CC(1:(k-1))*xa'+aleatorio(h,k);
        end
        x(h,:,t)=xa;
    end
end

```

```

        end

    end

    hold on

    subplot(1,2,1)

        axis([0 Nmax -limit limit])

    subplot(1,2,2)

        axis([-limit limit -1 1])

    drawnow

    frame = getframe(1);

    im = frame2im(frame);

    [A,map] = rgb2ind(im,256);

    imwrite(A,map,'paseoaleatoriofraccionariodirect.gif','gif','LoopCount'
    ,Inf,'DelayTime',0.01);

    hold off

    for k=1:Nmax

        clf

        hold on

        subplot(1,2,1)

            hold on

            titu=num2str(h);

            titu2=num2str(alfa);

            title(strcat(titu,' paseo con \alpha =',titu2,' tomando la
            misma aleatoriedad'))

            for t=1:length(vAlfa)

                plot(ejex(1:k),x(h,1:k,t),color(t))

            end

            xlabel('PASO');

            ylabel('DISTANCIA AL ORIGEN');

            p1=plot(0,0,'g');p2=plot(0,0,'c');p3=plot(0,0,'b');

            legend([p1,p2,p3],{'Paseo con \alpha = 0.5','Paseo con \alpha
            = 1','Paseo con \alpha = 1.2'},'location','northwest')

            axis([0 Nmax -limit limit])

            hold off

            subplot(1,2,2)

            hold on

```

```

title(strcat('Paseo aleatorio de una particula paso=',num2str(k)))

plot(ejexy,0,'k.') %dibujamos los puntos donde puede caer la
particula

plot(0,0,'k+') %dibujamos el centro de la grafica

for t=1:length(vAlfa)

    plot(x(1,k,t),0,strcat(color(t),'*'))

end

xlabel('Para más información: ivangregoriort@gmail.com')

axis([-limit limit -1 1])

hold off

hold off

drawnow

frame = getframe(1);

im = frame2im(frame);

[A,map] = rgb2ind(im,256);

imwrite(A,map,'paseoaleatoriofraccionariodirect.gif','gif','WriteMode'
,'append','DelayTime',0.1);

end

drawnow

frame = getframe(1);

im = frame2im(frame);

[A,map] = rgb2ind(im,256);

imwrite(A,map,'paseoaleatoriofraccionariodirect.gif','gif','WriteMode'
,'append','DelayTime',3);

```

BIBLIOGRAFÍA

1. K. B. Oldham y J. Spanier, *The Fractional Calculus*, New York and London: Academic Press, 1974.
2. D. Baleanu, *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods; Series on complexity, Nonlinearity, and chaos*, vol.3, Singapur: World Scientific, 2012.
3. V. G. Buesaquillo Gomez, *Métodos de Cálculo fraccional en la descripción de sistemas físicos*. San Juan de Pasto, Colombia: Universidad de Nariño, 2013.
4. N. H. Abel, "Auflösung einer mechanischen Aufgabe." *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik*, vol. 1, pp. 153-157, 1826. Available: <https://eudml.org/doc/183021>.
5. P. Arafet Padilla, H. Domínguez Abreu y F. Chang Mumañ, *Una introducción al cálculo fraccionario*. Santiago de Cuba, Cuba: Ediciones UO, 2009.
6. E. Coronel Frías y M. T. Moreno Chapoñán, "Equivalencias entre las propiedades de las derivadas fraccionarias y las derivadas clásicas". Universidad nacional Pedro Ruiz Gallo, 2016. [En línea]. Disponible en: <http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/UNPRG/981>
7. J. L. Rodríguez, "Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones". Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización. Universidad de Santiago de Compostela, 2018. [En línea]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10347/18122>
8. Kilbas, H. Srivastava y J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006.
9. D. Maravall Casesnoves, "Inventiva y creatividad en matemáticas y en física. Los fractales y el cálculo fraccionario", *Real academia de ciencias exactas, físicas y naturales*, vol. 103, nº 1, 2009.
10. M. Martínez García, "Ecuaciones diferenciales de orden fraccional y sus aplicaciones," 2013. [En línea]. Disponible en : <https://upcommons.upc.edu/handle/2099.1/19404>
11. Y. Ouyang y W. Wang, "Comparison of Definition of Several Fractional Derivatives", en: *2016 International Conference on Education, Management and Computer Science*, 2016, doi: 10.2991/icemc-16.2016.114.
12. T. Pierantozzi, *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas*. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid, 2007. Disponible en: <https://eprints.ucm.es/7371/>
13. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, 1999.